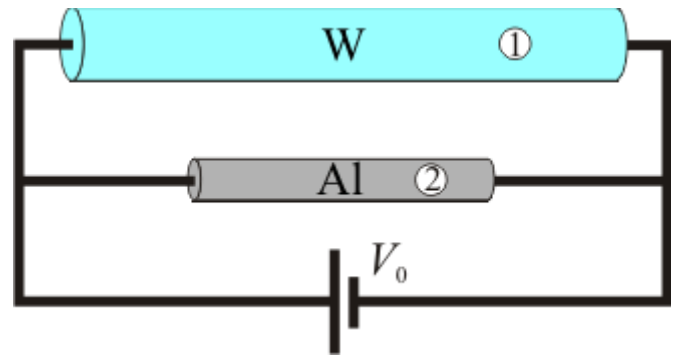


1 Enunciado

La longitud y el diámetro de una barra cilíndrica de wolframio o tungsteno (W) son el doble que los de otra barra de aluminio (Al). En ambos casos, la longitud de la barra es mucho mayor que su diámetro. Los extremos de ambas están conectados a los bornes o polos de una batería de fuerza



electromotriz V_0 y resistencia interna despreciable, constituyendo una asociación de resistencias *en paralelo*. Sabiendo que la conductividad eléctrica del aluminio es prácticamente el doble que la del tungsteno, determine las relaciones entre las siguientes magnitudes:

1. Resistencias eléctricas de las barras e intensidades de corriente.
2. Densidad de corriente e intensidad del campo eléctrico en el interior de los conductores.

2 Solución

2.1 Consideraciones generales

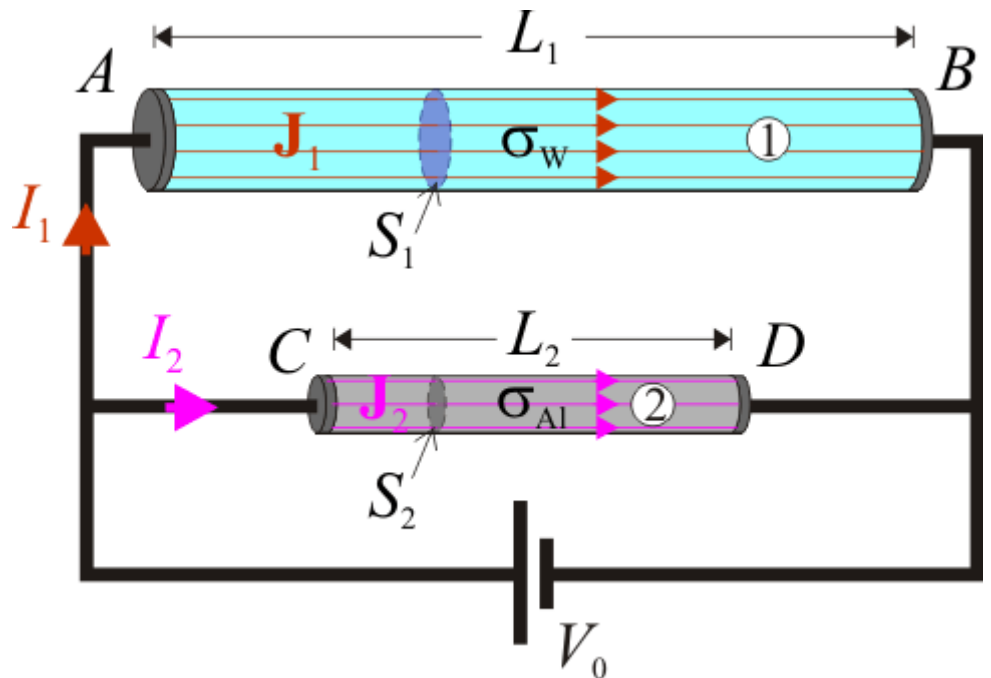
Comenzaremos con un planteamiento general del problema, repasando los diversos conceptos, ideas y resultados que pueden ser utilizados para resolver este ejercicio.

Para que las barras de tungsteno (conductor "1") y aluminio (conductor "2"), estén conectados en paralelo, sus respectivos extremos A y C deben ser equipotenciales, así como los extremos B y D de dichas barras. De esta forma, cuando la asociación descrita se conecta a un generador caracterizado por una fuerza electromotriz $\mathcal{E} = V_0$ y resistencia interna despreciable (nula en el caso ideal), entre los extremos de ambas barras existirá la misma diferencia de potencial constante en el tiempo, que será:

$$R_{\text{gen}} \approx 0 \implies V_A - V_B = V_C - V_D \approx V_0$$

Esta diferencial de potencial está intrínsecamente relacionada con la existencia un campo eléctrico que, en el interior de las barras "1" y "2" (medios óhmicos de conductividades σ_W y σ_{Al} , respectivamente), producirá corrientes eléctricas estacionarias descritas por sendas distribuciones volumétricas $\mathbf{J}_1(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$.

En el enunciado se indica que las longitudes de las barras son mucho mayores que sus respectivos diámetros, lo cual podemos interpretar como que sus secciones son lo suficientemente pequeñas como para poder aplicar la aproximación de **conductores filiformes**. Es decir, podemos considerar que las corrientes se distribuyen de manera uniforme en cada sección transversal de ambos conductores y que éstas van a ser equipotenciales. Como en el enunciado no se indica lo contrario, consideramos que las áreas S_1 y S_2 de dichas secciones transversales no cambian a lo largo del correspondiente conductor. De esta forma, si I_1 e I_2 son las respectivas intensidades de corriente estacionaria en las barras, se tendrá:



$$I_i = \int_{S_i} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_i} |\mathbf{J}_i| dS \approx |\mathbf{J}_i| S_i$$

Además, las densidades de corriente en cada punto tendrán la dirección tangente al conductor en dicho punto. En el caso que nos ocupa, y tal como aparece en la figura, se considera que las barras conductoras son rectilíneas. Si \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son sendos vectores unitarios de direcciones constantes paralelas a las barras, se tendrá que:

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = \frac{I_1}{S_1} \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \frac{I_2}{S_2} \mathbf{u}_2$$

Hay que señalar que, en el caso de conductores rectilíneos, en que las distribuciones de corriente estacionarias son constante en dirección y sentido, las anteriores soluciones son exactas.

Las líneas de los anteriores campos vectoriales en el interior de las barras constituyen sendos tubos de corrientes cuya resistencia eléctrica se define

como la relación entre la diferencia de potencial a que están sometidas, y la intensidad que recorre cada una de las barras. En el caso de conductores filiformes (o de distribuciones uniformes de corrientes rectilíneas) en medios homogéneos de sección constante, el valor de la resistencia eléctrica es:

$$R_i = \frac{V_{A,C} - V_{B,D}}{I_i} = \frac{L_i}{\sigma_i S_i}$$

Recordemos cómo se obtiene tal resultado, calculando la diferencia de potencial entre los extremos de cada conductor/tubo de corriente a lo largo de sendos caminos paralelos a las barras y por el interior éstas:

$$\left. \begin{array}{l} d\mathbf{r}_i = dl \mathbf{u}_i \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{J}_i}{\sigma_i} \end{array} \right\} \implies V_{A,C} - V_{B,D} = \int_{A,C}^{B,D} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}_i = \int_{A,C}^{B,D} \frac{I_i}{\sigma_i S_i} dl$$

Y puesto que la conductividad es constante en cada medio, y la sección y la intensidad de las corrientes estacionarias son constante a lo largo de cada tubo, se obtiene

$$V_A - V_B = \frac{I_1}{\sigma_w S_1} \int_A^B dl = \frac{L_1}{\sigma_w S_1} I_1 = R_1 I_1$$

$$V_C - V_D = \frac{I_2}{\sigma_{Al} S_2} \int_C^D dl = \frac{L_2}{\sigma_{Al} S_2} I_2 = R_2 I_2$$

2.2 Relaciones entre las resistencias y las intensidades en los dos conductores

En el enunciado se indica que la longitud y el diámetro de la barra "1" son el doble que las de la barra "2"; en consecuencia, la sección de la barra de tungsteno es cuatro veces mayor que la de aluminio. Además, la conductividad de éste material es prácticamente el doble que la del tungsteno. Por tanto, la relación entre las resistencia eléctrica de ambos conductores será:

$$\left. \begin{array}{l} L_1 = 2 L_2 \\ S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 4 \frac{\pi (2d_2)^2}{4} = 4 S_2 \\ \sigma_{Al} \approx 2 \sigma_w \end{array} \right\} \implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1 \sigma_{Al} S_2}{L_2 \sigma_w S_1} \approx 1$$

Es decir, ambas barras tienen la misma resistencia eléctrica, aproximadamente. Por tanto, si entre sus extremos se establece la misma

diferencia de potencial, las intensidades de corriente estacionaria que las recorran serán también prácticamente iguales:

$$V_A - V_B = V_C - V_D \approx V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{V_0/R_1}{V_0/R_2} = \frac{R_2}{R_1} \approx 1$$

2.3 Relaciones entre las densidades de corriente y los campos en los dos conductores

Si las intensidades de corriente que recorren ambos conductores son las mismas, la relación entre las densidades de corriente que existen en ambos medios estarán determinadas por las secciones de las barras:

$$\frac{|\mathbf{J}_1|}{|\mathbf{J}_2|} = \frac{I_1/S_1}{I_2/S_2} \approx \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}$$

Finalmente, la relación entre las intensidades del campo eléctrico en cada una de las barras estará determinada por la anterior relación y por la que guardan las conductividades de los medios:

$$\frac{|\mathbf{E}_1|}{|\mathbf{E}_2|} = \frac{|\mathbf{J}_1|/\sigma_w}{|\mathbf{J}_2|/\sigma_{Al}} = \frac{|\mathbf{J}_1|}{|\mathbf{J}_2|} \frac{\sigma_{Al}}{\sigma_w} = \frac{1}{2}$$

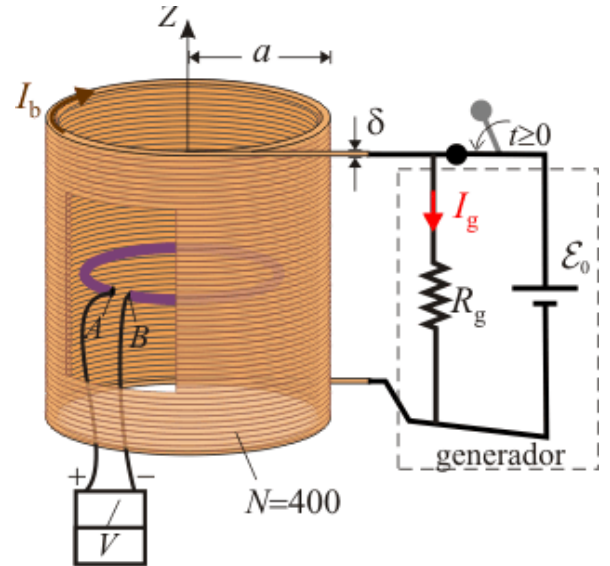
Obsérvese que este mismo resultado puede obtenerse teniendo en cuenta que si las densidades de corriente en el interior de las barras son uniformes, los correspondientes campos eléctricos también deben serlo y que, además, la circulación de éstos a lo largo de los conductores debe ser, en ambos casos, igual al valor V_0 :

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = |\mathbf{E}_1| \int_A^B dl = |\mathbf{E}_1| L_1 \\ V_0 &= \int_C^D \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = |\mathbf{E}_2| \int_C^D dl = |\mathbf{E}_2| L_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|\mathbf{E}_1|}{|\mathbf{E}_2|} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{2}$$

1 Enunciado

Un hilo de cobre de sección circular cuyo diámetro es $\delta = 1 \text{ mm}$, se enrolla de forma compacta para formar una bobina cilíndrica recta de radio $a = 18 \text{ mm}$ y 400 espiras, todas ellas perpendiculares al eje de la bobina. Ésta se conecta a un generador caracterizado por una fuerza electromotriz $\mathcal{E}_0 = 2 \text{ V}$, con una resistencia interna $R_g = 10 \Omega$, conectada en paralelo con el dispositivo f.e.m ideal.

1. Calcule la resistencia eléctrica R de la bobina y las intensidades I_b e I_g de las corrientes estacionarias que se establecen en el sistema. Calcule también la cantidad de calor generada por unidad de tiempo por dichas corrientes.
2. Determine el campo magnético creado por la corriente de la bobina. Obtenga la expresión del coeficiente de autoinducción L de la bobina en función de los parámetros geométricos del sistema, y calcule el valor de L para los datos proporcionados.
3. Tras conectar el generador a la bobina, en ésta no se establece la corriente estacionaria I_b de forma inmediata, sino que verifica un proceso transitorio para $t \geq 0$, en el cuál la intensidad varía según la ley exponencial: $I(t) = I_b (1 - e^{-t/\tau})$, siendo $\tau = L / R$. Obtenga la expresión que describe cómo varía en el tiempo la señal de tensión $V(t) = V_A - V_B$ que registra un voltímetro conectado, tal como se indica en la figura, a los extremos de una anilla conductora incompleta de radio $2a / 3$ y que se encuentra en un plano perpendicular al eje de la bobina.
4. En el instante $t_0 = \tau$, ¿qué fracción de la potencia suministrada por el generador a la bobina no se disipa en forma de calor? ¿Qué ocurre con la energía no disipada?



Datos: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$; $\rho_{\text{Cu}} = 0.17 \times 10^{-7} \Omega \text{ m}$.

2 Solución

2.1 Corrientes estacionarias en el sistema

2.1.1 Resistencia eléctrica de la bobina

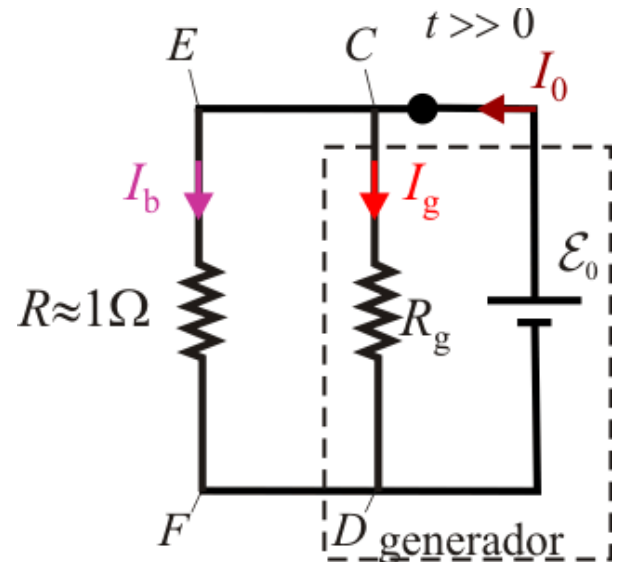
La bobina consiste en un hilo conductor enrollado, formando 400 espiras circulares. Por tanto, su resistencia eléctrica es la de dicho hilo de cobre. Obviamente, es posible aplicar la aproximación de conductor filiforme, de manera que la resistencia eléctrica será proporcional a la longitud total del hilo, l , e inversamente proporcional a su sección S ; la constante de proporcionalidad es la resistividad del cobre. Teniendo en

cuenta cómo se relacionan l y S con los parámetros geométricos indicados en el enunciado y los valores de éstos, se tiene:

$$R = \rho_{\text{Cu}} \frac{l}{S} = \rho_{\text{Cu}} \frac{2\pi a N}{\pi (\delta/2)^2} \Rightarrow R = \rho_{\text{Cu}} \frac{8 a N}{\delta^2} \approx 1 \Omega$$

2.1.2 Intensidades de corrientes estacionarias

Como la bobina tiene una autoinducción L de valor significativo y, por tanto, no despreciable, se tendrá que una corriente eléctrica I_b recorriendo dicha bobina, daría lugar a la existencia de un flujo magnético no nulo, Φ_m a través de sus N espiras. Cuando el sistema alcanza el estado estacionario, todas las magnitudes eléctricas y magnéticas son constantes en el tiempo, por lo que no existirá una fuerza electromotriz inducida en el circuito, o una caída de tensión extra en la bobina debida a su autoinducción. En consecuencia, el modelo circuital del sistema en el estado estacionario consiste en la resistencia eléctrica R del hilo que forma la bobina, conectada a la fuente de potencial fijo que, como se indica en la figura del enunciado, se modela mediante una f.e.m. ideal constante \mathcal{E}_0 con una resistencia R_g conectada en paralelo.



Obsérvese que la f.e.m. ideal fuerza a que la diferencia de potencial entre los puntos C y D , y entre E y F , sea \mathcal{E}_0 en ambos casos. Por otra parte, dichas diferencias de potencial deben ser proporcionales a las intensidades de corriente que recorren la bobina (I_b), y la resistencia interna del generador (I_g). Las constantes de proporcionalidad son las resistencias eléctricas R y R_g , respectivamente. Aplicando la segunda ley de Kirchoff, primero en la malla formada por la f.e.m. ideal y la resistencia interna del generador, y luego en la formada por la f.e.m. y la resistencia eléctrica de la bobina, se tendrá:

$$\mathcal{E}_0 = V_C - V_D = R_g I_g \Rightarrow I_g = \frac{\mathcal{E}_0}{R_g} = 0,2 \text{ A}$$

$$\mathcal{E}_0 = V_E - V_F = R I_b \Rightarrow I_b = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \approx 2,0 \text{ A}$$

Si aplicamos la primera ley de Kirchoff en el nodo C del circuito, obtenemos la intensidad I_0 de la corriente eléctrica total suministrada por la f.e.m. ideal del generador cuando el sistema alcanza el estado estacionario:

$$I_g + I_b + (-I_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = I_g + I_b \approx 2,2 \text{ A}$$

2.1.3 Potencia disipada

Al considerar el hilo de cobre como medio óhmico y, por tanto, con resistividad y resistencia eléctrica no nula, se tendrá que el paso de una corriente eléctrica estacionaria implica una disipación continua de energía que, por efecto Joule, se transforma en calor. Como se sabe, la cantidad de energía disipada por unidad de tiempo (potencia), en la bobina es proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente que la recorre, siendo la constante de proporcionalidad la resistencia eléctrica del elemento:

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_R = P_{\text{Jou}}|_R = R I_b^2 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_R = P_{\text{Jou}}|_R \approx 4,0 \text{ W}$$

En cuanto a la resistencia interna del generador, se trata de un elemento que permite modelar el hecho de que no toda la energía (de la naturaleza que sea) transformada en la fuente de potencial constante, es suministrada por éste dispositivo en forma de energía eléctrica: parte de esa energía es disipada dentro del propio generador. La resistencia interna del generador es un parámetro R_g de valor tal que la potencia disipada (energía por unidad de tiempo) en dicho dispositivo, en régimen estacionario, es:

$$P_{\text{dis}}|_{\text{gen}} = R_g I_g^2 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{dis}}|_{\text{gen}} = 0,4 \text{ W}$$

Conviene tener presente que la disipación de energía en la resistencia equivalente del generador no va a consistir sólo en la transformación en calor: además de este mecanismo pueden intervenir otros, como la creación de vibraciones, ruido, etc.

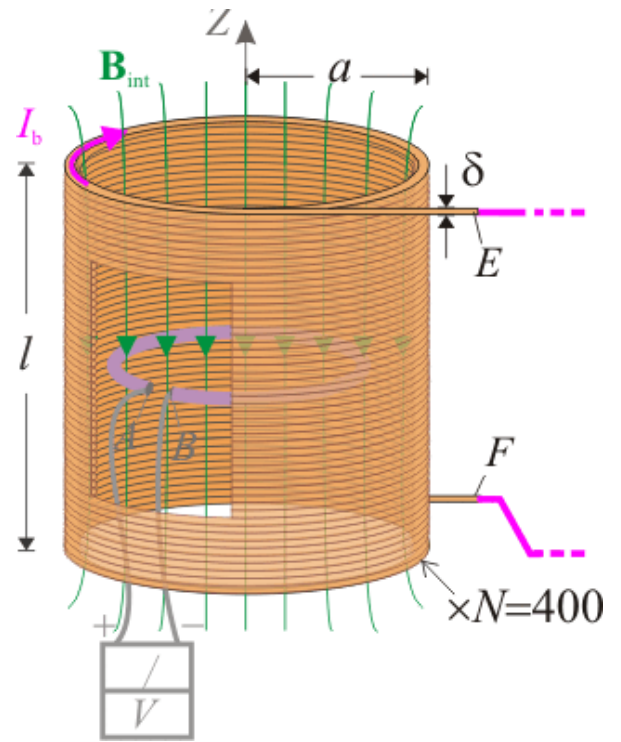
2.2 Propiedades magnéticas

2.2.1 Campo magnético de corrientes estacionarias

Para calcular el campo magnético creado por la corriente estacionaria de intensidad I_b que recorre la bobina, ha de seguirse un procedimiento similar al del ejercicio que puede encontrarse en [este enlace](#). En el enunciado se indica que las espiras que conforman la bobina están enrolladas de forma compacta, y puesto que el diámetro del hilo es δ , la longitud total l del solenoide es:

$$l = N \delta = 400 \text{ mm} \gg a$$

Es decir, lo suficientemente grande frente al diámetro de la bobina como para poder considerar la aproximación de bobina larga de sección uniforme, según la cuál el campo magnético es intenso y prácticamente uniforme (constante) en el interior, y nulo en el exterior. Así, tomando como dirección OZ el eje de la bobina cilíndrica, con el hilo conductor enrollado de manera que la corriente eléctrica recorre la bobina en sentido horario, se tendrá que el campo magnético creado por dicha corriente es:



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \simeq \begin{cases} -\mu_0 n I_b \mathbf{k} = \mathbf{B}_{\text{int}}; & \text{en el interior de la bobina} \\ \mathbf{0}; & \text{en el exterior de la bobina} \end{cases}$$

Obsérvese que el enrollamiento del cable en sentido horario respecto del eje OZ , tiene como consecuencia que cuando la corriente eléctrica recorre la bobina en dicho sentido, el sentido del campo magnético es opuesto al del dicho eje. Por otra parte, el parámetro n es la densidad lineal de espiras; es decir, el número total N dividido por la longitud total l del solenoide:

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1}{\delta} = 10^3 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_{\text{int}} = -B_{\text{int}} \mathbf{k}, \quad \text{con} \quad B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 I_b}{\delta} \approx 2,5 \text{ mT}$$

2.2.2 Autoinducción de la bobina

Como se sabe, la autoinducción de la bobina Γ , es el parámetro geométrico L característico de la relación lineal existente entre la intensidad de corriente eléctrica que recorre la bobina y el flujo del campo magnético creado por dicha corriente, a través de una superficie Σ que se apoya en las N espiras de la bobina:

$$\Phi_m|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = L I_b$$

Según vimos en el anterior subapartado, sólo contribuirá a dicho flujo el campo magnético uniforme \mathbf{B}_{int} que existe en el interior del solenoide. Y como las N espiras son idénticas, de área $S = \pi a^2$, y están situadas en planos paralelos perpendiculares al vector \mathbf{k} , el flujo total a través de la bobina será (aproximadamente) igual a N veces

el flujo a través de una de las espiras. Por otra parte, al estar el hilo enrollado en sentido horario, se tendrá que $d\mathbf{S} = dS (-\mathbf{k})$, de manera que,

$$\Phi_m]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx N \int_S \mathbf{B}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \Phi_m]_{\Sigma} \approx N \frac{\mu_0 I_b}{\delta} \int_S dS = \frac{N \mu_0 \pi a^2}{\delta} I_b \Rightarrow$$

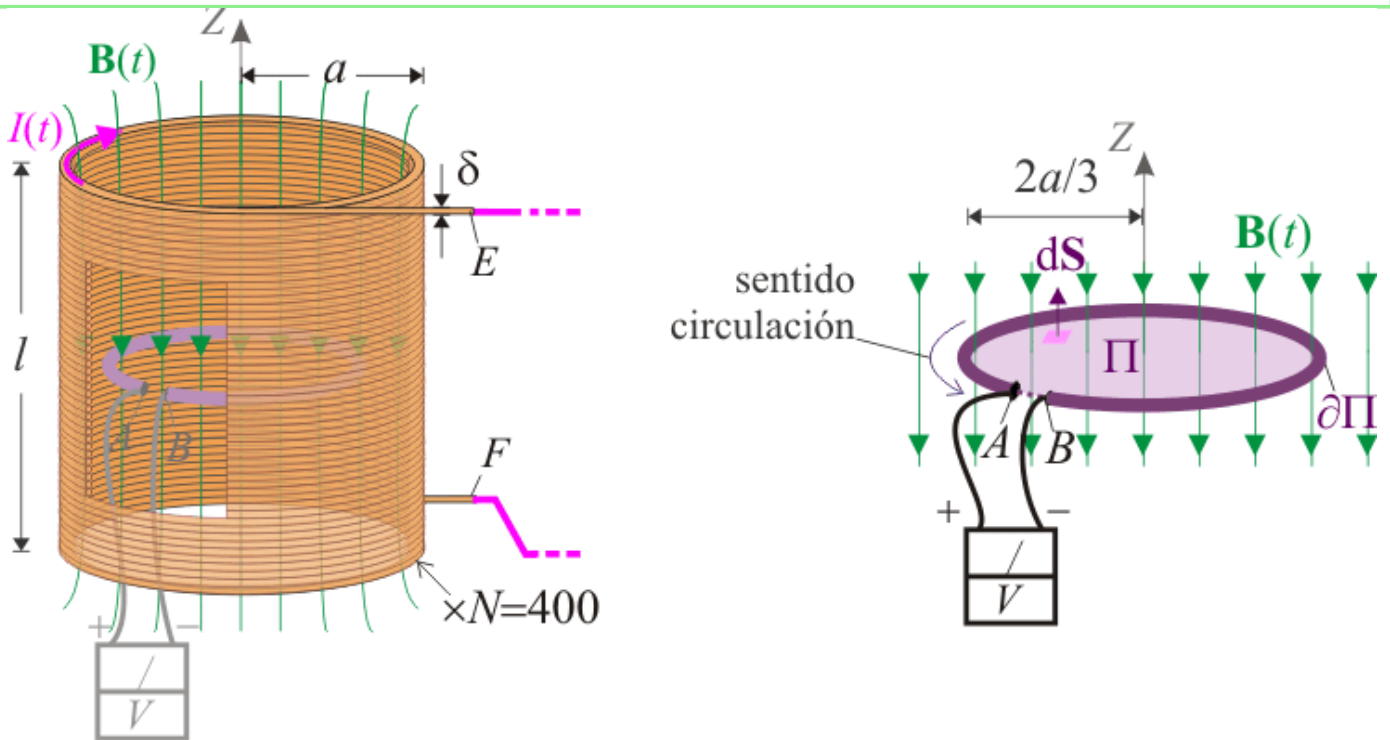
$$L \approx \frac{N \mu_0 \pi a^2}{\delta} \approx 512 \mu\text{H}$$

2.3 Tensión en la espira

2.3.1 Flujo magnético en la espira

Consideremos que la bobina es recorrida por una corriente eléctrica de intensidad variable en el tiempo, $I(t)$. Si esta variación no es muy rápida, lo cual se asume en el sistema bajo estudio, el único efecto significativo es que el campo magnético creado por dicha corriente va a ser despreciable en el exterior de la bobina, y uniforme e intenso en el interior. Es decir, presenta una configuración espacial similar a la del campo creado por la corriente estacionaria, sólo que ahora, el campo en el interior no es constante y presenta la misma variación que la intensidad de la corriente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; t) \simeq \begin{cases} -\mu_0 n I(t) \mathbf{k} = -\mu_0 n I_b (1 - e^{-t/\tau}) \mathbf{k} = \mathbf{B}(t); & \text{en el interior de la bobina} \\ \mathbf{0}; & \text{en el exterior de la bobina} \end{cases}$$



La espira abierta circular $\partial\Pi$, de radio $2a/3$ y colocada en el interior de la bobina, se encuentra sometida al campo magnético uniforme y variable $\mathbf{B}(t)$. El flujo magnético a través de dicha espira se calcula tomando cualquier superficie que se apoye en $\partial\Pi$. Habida cuenta de que esta espira se encuentra contenida en un plano horizontal,

perpendicular al eje OZ , al cuál es paralelo el campo magnético, tomamos como superficie para calcular el flujo al disco Π cuyo borde coincide con la espira:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_m|_{\Pi} = \int_{\Pi} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \\ d\mathbf{S}|_{\Pi} = dS \mathbf{k} \end{array} \right\} \implies \Phi_m|_{\Pi} = -\mu_0 n I(t) \int_{\Pi} dS = -\frac{4a^2 \pi \mu_0 n}{9} I(t) = \Phi_m(t)$$

Obsérvense que la elección del elemento de superficie implica medir flujos magnéticos positivos cuando el campo magnético atraviesa Π en el sentido del eje OZ ; por tanto la corriente circulando por la bobina en el sentido horario producirá un flujo negativo en la espira abierta.

$$I(t) > 0 \implies \Phi_m|_{\Pi} > 0$$

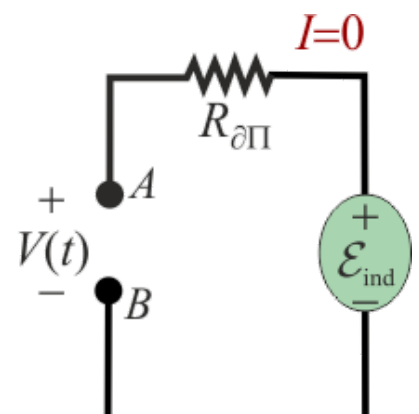
2.3.2 Aplicación de la ley de Faraday

Por otra parte, el hecho de que el flujo magnético a través de la espira sea variable en el tiempo, dará lugar a la aparición de una fuerza electromotriz inducida en dicha espira $\partial\Pi$. Según las leyes de inducción electromagnética, esta fuerza electromotriz inducida es opuesta a la variación instantánea del flujo magnético:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Pi} = -\frac{d\Phi_m}{dt}\Big|_{\Pi} = \frac{4a^2 \pi \mu_0 n}{9} \frac{dI(t)}{dt} = \frac{4a^2 \pi \mu_0 n}{9\tau} I_b e^{-t/\tau}$$

Teniendo en cuenta la existencia de esta única fuerza electromotriz y que la espira es un medio óhmico que tendrá un (pequeña) resistencia eléctrica, $R_{\partial\Pi} \approx 0$, podemos construir un circuito equivalente en el que se deberá cumplir la segunda ley de Kirchoff; es decir, en la malla constituida por la espira $\partial\Pi$, la suma de todas las fuerzas electromotrices debe ser igual a la suma de todas las caídas de tensión. Nótese que como la espira está abierta, entre los extremos A y B existirá, en general, una caída de tensión que mediremos con el voltímetro colocado de manera que su lectura sea $V(t) = V_A - V_B$. Es fundamental tener en cuenta que tanto las caídas de tensión como las f.e.m. se calculan matemáticamente como circulaciones del campo eléctrico, y que el sentido de éstas debe ser compatible con el sentido adoptado para medir el flujo magnético: al tomar $d\mathbf{S}|_{\Pi}$ en el sentido del eje OZ , las circulaciones se han de realizar en sentido antihorario.

Con toda esta información, construimos el siguiente circuito equivalente, por el que no puede circular corriente eléctrica al encontrarse abierto. En consecuencia, la ecuación del circuito determina que la señal medida por el voltímetro va a ser exactamente igual a la f.e.m. inducida por la variación del flujo magnético:



$$\left[\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_j V_j \right]_{\partial\Pi} \longrightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}} \Big|_{\partial\Pi} = \underbrace{R_{\partial\Pi} I}_{=0} + V_A - V_B = V(t)$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{4 a^2 \pi \mu_0 n R}{9 L} I_b e^{-t/\tau} = \frac{4 a^2 \pi \mu_0 n}{9 L} \mathcal{E}_0 e^{-t/\tau}$$

Y si expresamos la autoinducción de la bobina en términos de los parámetros aportados como datos en el enunciado, se obtiene que la señal de tensión medida por el voltímetro presenta un comportamiento exponencial decreciente:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} V_0 \approx \frac{4 \mathcal{E}_0}{9 N} \approx 2,2 \text{ mV} \\ \tau = \frac{L}{R} \approx 0,5 \text{ ms} \end{cases}$$

2.4 Balance energético en la bobina

2.4.1 Ecuaciones para el estado transitorio

Volvamos a considerar el sistema formado por el generador y la bobina, pero ahora en el régimen transitorio considerado en el apartado anterior. Ahora, el campo magnético variable en el tiempo generado en el interior de la bobina cuando ésta es recorrida por la corriente de intensidad $I(t) = I_b (1 - e^{-t/\tau})$, da lugar a un flujo magnético que variable en el tiempo que, en virtud de la ley de Faraday, se traduce en una fuerza electromotriz inducida en la bobina.

Como acabamos de ver, este mismo campo magnético variable inducía una f.e.m. en la espira $\partial\Pi$, situada en el interior de la bobina, pero como dicha espira estaba abierta, no la recorría ninguna corriente eléctrica y, por tanto, no modifica el campo magnético $\mathbf{B}(t)$ calculado en el [subapartado 2.3.1](#). En consecuencia, el flujo magnético a través de las N espiras de la bobina será proporcional a la intensidad $I(t)$, siendo la constante de proporcionalidad la autoinducción L calculada en [2.2.2](#):

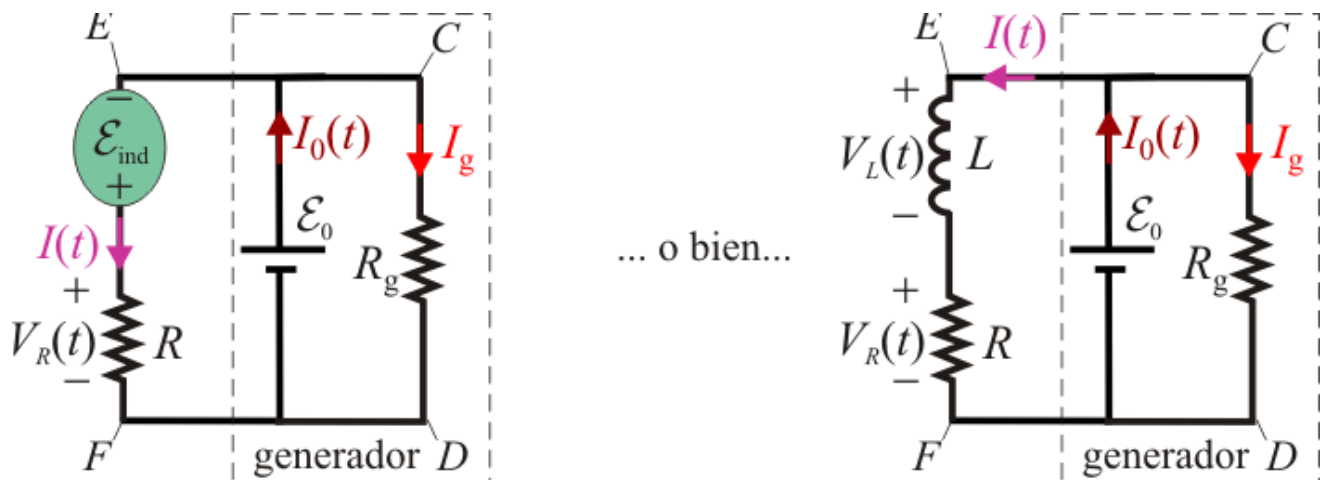
$$\Phi_m \Big|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = L I(t)$$

Por tanto, en el proceso transitorio existe una f.e.m. inducida en la bobina cuyo valor es:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} \Big|_{\partial\Sigma} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \Big|_{\Sigma} = -L \frac{dI(t)}{dt} = -V_L(t)$$

... y que modifica el circuito equivalente construido en el [subapartado 2.1.2](#) para modelar el sistema formado por la bobina y el generador en el régimen estacionario.

Realmente, sólo se modifica la rama del circuito correspondiente a la bobina, en la que hay que introducir la f.e.m. inducida, de manera que en la malla formada por aquella y por la f.e.m. ideal, se verifique la segunda ley de Kirchoff incluyendo la $\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma}$... o la caída de tensión $V_L(t)$ en el elemento llamado autoinducción. Es decir, podemos utilizar cualquiera de los dos modelos siguientes:



... o bien...

... que están caracterizados por idénticas ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma} &= V_R(t) = R I(t) \\ \mathcal{E}_0 &= R_g I_g \end{aligned} \right\} \dots \text{ o bien... } \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= V_L(t) + V_R(t) = L \frac{dI(t)}{dt} + R I(t) \\ \mathcal{E}_0 &= R_g I_g \end{aligned} \right.$$

2.4.2 Potencia suministrada y disipada

La potencia instantánea suministrada por el generador a la bobina es igual al producto de la intensidad de la corriente eléctrica que entra en la bobina por la tensión o voltage entre sus extremos E y F . Esta potencia en el instante $t = \tau$ es:

$$P_{\text{sum}}(t = \tau) = (V_E - V_F) I(\tau) = \mathcal{E}_0 I_b(1 - e^{-1})$$

La potencia disipada en la bobina por efecto Joule (en forma de calor), en dicho instante es igual a la resistencia eléctrica de dicho dispositivo, multiplicada por el cuadrado de la intensidad de la corriente eléctrica:

$$P_{\text{Jou}}(t = \tau) = R I^2(\tau) = R I_b^2(1 - e^{-1})^2$$

Por tanto, la fracción de potencia suministrada en el instante τ que NO se disipa por efecto Joule en la bobina será:

$$\frac{P_{\text{sum}} - P_{\text{Jou}}}{P_{\text{sum}}}\Bigg|_{t=\tau} = 1 - \frac{R I_b}{\mathcal{E}_0}(1 - e^{-1}) = \frac{1}{e} \approx 0,37 = 37\%$$

2.4.3 Energía no disipada

La cantidad de energía suministrada que no se disipa por efecto Joule desde el instante inicial hasta el instante propuesto, $t = \tau$, puede calcularse integrando en este intervalo la potencia no disipada. En un instante arbitrario t , esta potencia no disipada es:

$$P_m(t) = P_{\text{sum}}(t) - P_{\text{Jou}}(t) = \mathcal{E}_0 I(t) - R I^2(t)$$

Pero utilizando las ecuaciones del [subapartado anterior](#), se obtiene que la potencia instantánea no disipada es...

$$P_m(t) = P_{\text{sum}}(t) - P_{\text{Jou}}(t) = L I(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{L}{2} \frac{d}{dt} [I^2(t)]$$

... y la energía no disipada en el intervalo de tiempo $(0, \tau)$:

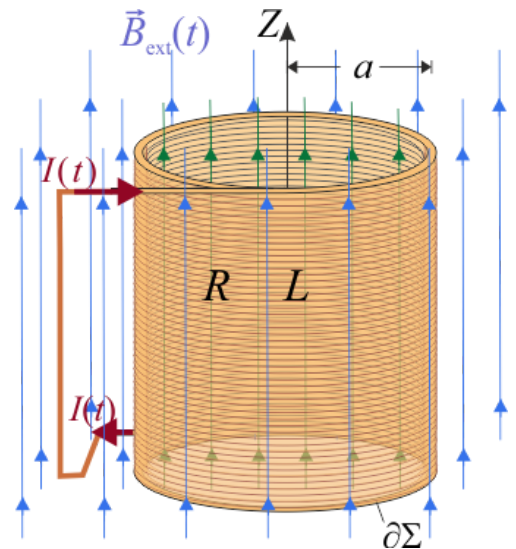
$$W_m \Big|_{0 \rightarrow \tau} = \int_0^\tau P_m dt = \frac{L}{2} \int_0^\tau d[I^2(t)] \quad \Rightarrow$$

$$W_m \Big|_{0 \rightarrow \tau} = \frac{L}{2} [I^2(\tau) - \underbrace{I^2(0)}_{=0}] = \frac{L}{2} I_b^2 (1 - e^{-1})^2 \approx 406 \mu\text{J}$$

Esta cantidad de energía suministrada y no disipada por efecto Joule, queda almacenada en la bobina, constituyendo el soporte físico del campo magnético $\mathbf{B}(\tau)$ que hay en el interior de la bobina en el instante τ .

1 Enunciado

Una bobina $\partial\Sigma$ de resistencia eléctrica R y autoinducción L está formada por N espiras circulares idénticas de radio a , todas perpendiculares al eje OZ que pasa por sus centros. La espira está cortocircuitada y sometida a un campo magnético externo uniforme y variable en el tiempo $\vec{B}_{\text{ext}}(t) = B(t)\vec{k}$. El resultado es que la bobina es recorrida por una intensidad de corriente $I(t)$ medida en el sentido antihorario.



1. Obtenga la expresión del flujo magnético total a través de las N espiras que forman la bobina (no olvidar que su autoinducción tiene un valor apreciable).
2. Aplique las leyes de la inducción electromagnética para determinar cómo deber ser la ley horaria $B(t)$ que verifica el campo magnético externo para que la bobina sea recorrida por una corriente eléctrica de intensidad constante, I_0 .
3. En las condiciones del apartado anterior, ¿qué energía magnética se almacena en la bobina? ¿Qué cantidad de energía por unidad de tiempo se disipa en la bobina por efecto Joule?

2 Solución

Fundamento teórico

Un campo magnético variable en el tiempo fluye a través de la superficie Σ que se apoya en la bobina cilíndrica recta $\partial\Sigma$, constituida por N espiras iguales dispuesta sin solución de continuidad en una serie de planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje OZ de la bobina. Y puesto que la bobina está sometida a un campo externo variable en el tiempo, el flujo magnético a través de la misma será, en general, función del tiempo, $\Phi_m|_{\Sigma} = \Phi_m(t)$. En virtud de las **leyes de la inducción electromagnética**, dicho flujo variable inducirá una fuerza electromotriz en el circuito, opuesta a la variación instantánea del flujo magnético.

$$\mathcal{E}(t)|_{\partial\Sigma} = - \left. \frac{d\Phi_m(t)}{dt} \right|_{\Sigma}$$

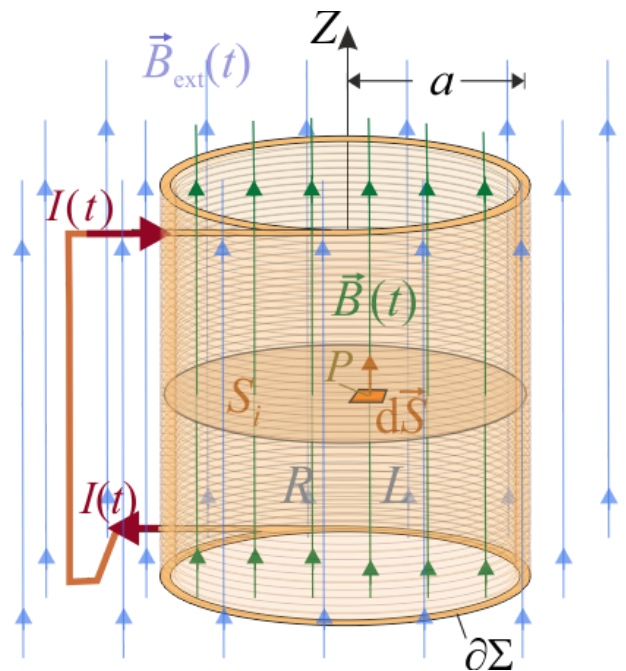
Y como la bobina está cortocircuitada, dicha fuerza electromotriz genera una corriente eléctrica en aquella cuya intensidad es proporcional a la f.e.m., siendo la constante de proporcionalidad el valor inverso de la resistencia eléctrica de la bobina.

$$I(t) = \frac{1}{R} \mathcal{E}(t)|_{\partial\Sigma}$$

Obsérvese que, según la ley de Biot y Savart, esta corriente eléctrica circulando por el conductor filiforme $\partial\Sigma$ (la bobina cortocircuitada), será la fuente de un campo magnético, que denominaremos \vec{B}_{cor} . Y puesto que, en general, la intensidad de la corriente va a ser variable en el tiempo, el campo magnético que genera también lo será. En general, este campo no va a ser uniforme, de manera que estará representado por un vector distinto en cada punto P del espacio (y en cada instante):

$$I(t)|_{\partial\Sigma} \longrightarrow \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t); \quad \text{con } \vec{r} = \vec{OP}$$

La forma de éste campo va a depender de la geometría de la bobina, y sólo en el caso de que ésta cumpliera las condiciones de **bobina larga** el campo magnético generado por la corriente será aproximadamente uniforme en el interior de la misma y prácticamente nulo en el exterior:



$$\frac{a}{h} \lll 1 \implies \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t) \approx \begin{cases} \mu_0 n I(t) \vec{k}, & \text{si } P \in \Sigma \\ \vec{0}, & \text{si } P \notin \Sigma \end{cases}$$

donde h sería la longitud de la bobina, y $n = N/h$, la densidad de espiras en la misma.

En cualquier caso, el campo magnético, $\vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t)$ creado por la corriente eléctrica que recorre la bobina, se superpone con el campo externo uniforme y variable en el tiempo, $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$ que se indica en el enunciado. Por tanto, el flujo magnético a través de la superficie Σ definida por la bobina $\partial\Sigma$ está determinado por la resultante de la superposición de ambos campos magnéticos. En consecuencia, dicho flujo magnético puede descomponerse en dos términos, siendo cada uno de ellos el flujo de la correspondiente componente del campo magnético total:

$$\vec{B}(\vec{r}; t) = \vec{B}_{\text{ext}}(t) + \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t) \implies \Phi_m(t) \Big|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S} = \Phi_m^{\text{ext}}(t) + \Phi_m^{\text{cor}}(t), \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Phi_m^{\text{ext}}(t) = \int_{\Sigma} \vec{B}_{\text{ext}}(t) \cdot d\vec{S} \\ \Phi_m^{\text{cor}}(t) = \int_{\Sigma} \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

Autoinducción de la bobina

Consideremos sólo el segundo de estos términos: el flujo magnético a través de la bobina de la componente de campo magnético creado por la corriente que la recorre, Φ_m^{cor} , y que podríamos denominar *autoflujo*. En virtud de la ley de Biot y Savart, dicho campo magnético puede expresarse como una función vectorial de la posición, determinada por la forma de la bobina $\partial\Sigma$, multiplicada por la intensidad de la corriente que la recorre. Y al calcular el *autoflujo* se obtiene que, en cada instante, éste va a ser proporcional a la intensidad de la corriente. El factor de proporcionalidad dependerá exclusivamente de la geometría de la bobina por lo que, si ésta no cambia de forma, tendrá un valor constante:

$$\vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t) = I(t) \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = I(t) \vec{f}_{\partial\Sigma}(\vec{r}) \implies \Phi_m^{\text{cor}}(t) = I(t) \underbrace{\int_{\Sigma} \vec{f}_{\partial\Sigma}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}}_{=L} = LI(t)$$

Esta constante de proporcionalidad, habitualmente denotada por el símbolo L , es la **autoinducción de la bobina**. Se trata de una magnitud física, cuya unidad de medida en el SI es el **henrio** (H), y que puede definirse como la relación entre el *autoflujo* Φ_m^{cor} a través de la bobina, y la intensidad $I(t)$ la corriente que la recorre. Obsérvese que, en un caso más general como el que nos ocupa, en que además existe otro campo magnético externo independiente de dicha corriente, se puede determinar la autoinducción de la bobina en términos de la derivada del flujo magnético total con respecto a la intensidad de la corriente:

$$L = \frac{\Phi_m^{\text{cor}}(t)}{I(t)}, \quad \text{o bien} \dots \quad \frac{d\Phi_m}{dI} = \underbrace{\frac{d\Phi_m^{\text{ext}}}{dI}}_{=0} + \frac{d\Phi_m^{\text{cor}}}{dI} = L$$

Caso particular de *bobina larga*

Como se ha discutido antes, la autoinducción depende exclusivamente de la geometría de la bobina, pues ésta va a determinar la forma del campo magnético producido por la corriente que la recorra. Consideremos el caso particular de que la geometría de la bobina permite asumir la aproximación de **bobina larga** y, por tanto, contamos con una expresión analítica aproximada del campo magnético: prácticamente uniforme en el interior de la bobina y (casi)nulo en los puntos exteriores.

Si $\partial\Sigma$ es una bobina recta formada por N espiras iguales situadas en planos paralelos, perpendiculares todos ellos al eje OZ , la superficie Σ que determina se puede definir como el conjunto de las N superficies planas S_i determinadas, cada una de ellas, por una de las N espiras. Éstas superficies planas tendrán igual área e igual orientación:

$$\Sigma \equiv S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N, \quad \text{tales que } \forall S_i \quad \begin{cases} d\vec{S}]_{P \in S_i} = dS \vec{k} \\ \int_{S_i} dS = S \end{cases}$$

El flujo del campo magnético a través de Σ (es decir, a través de la bobina) será igual a la suma de los flujos a través de esas N superficies planas. Obsérvese que asumir la uniformidad del campo magnético en el interior de la bobina, implica que éste va a ser prácticamente idéntico idéntico en todos los puntos de las N superficies planas S_i . Por tanto, el flujo magnético será igual a N veces el flujo a través de la superficie S_i delimitada por una cualquiera de las espiras:

$$\Phi_m^{\text{cor}}(t)]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S} \approx I(t)N \int_{S_i} \mu_0 n \vec{k} \cdot d\vec{S} = I(t)N \mu_0 n \int_{S_i} dS = \mu_0 N n S I(t)$$

Y aplicando la definición de **autoinducción** se obtiene que el valor de éste parámetro en el caso de una bobina recta, formada por N espiras iguales de área S , para la **aproximación de bobina larga** con una densidad de n de espiras por unidad de longitud, es:

$$L_0 = \mu_0 N n S = \mu_0 N n \pi a^2$$

... si las espiras son circunferencias de radio a .

Y tras este preámbulo teórico, procedemos a la inmediata resolución del ejercicio propuesto:

2.1 Flujo magnético a través de la bobina

Tal como acabamos de discutir, al estar la bobina cortocircuitada y sometida a un campo magnético *externo* variable, el flujo magnético a través de la misma puede descomponerse en dos términos: el correspondiente a dicho campo externo, Φ_m^{ext} , y el debido al campo magnético creado por la corriente inducida en la bobina, Φ_m^{cor} . Nótese que en el enunciado no se dan detalles concretos acerca de la geometría de la bobina, por lo que desconocemos cómo puede ser el campo $\vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t)$, ni si podemos aplicar correctamente la aproximación de bobina larga. Sin embargo, sí se aporta el dato de que la autoinducción de la bobina tiene un valor conocido L . Por tanto, el *autoflujo* magnético queda completamente determinado por la intensidad de la corriente eléctrica que circule por la bobina, según la expresión:

$$\Phi_m^{\text{cor}}(t) = \int_{\Sigma} \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S} = L I(t)$$

En cuanto al flujo magnético externo, en el enunciado se indica que el campo que lo produce es variable en el tiempo y uniforme. Es decir, en todo instante, este campo magnético externo es idéntico en todos los puntos del espacio que ocupa y rodea la bobina. Por tanto, de manera análoga a lo que ocurría con el campo generado por la corriente en la aproximación de bobina larga, el flujo a través de la bobina del campo externo uniforme será igual a N veces el flujo de dicho campo a través de una cualquiera de las espiras; por tanto:

$$\Phi_m^{\text{ext}}(t) = \int_{\Sigma} \vec{B}_{\text{ext}}(t) \cdot d\vec{S} = N \int_{S_i} B(t) \vec{k} \cdot d\vec{S} = N B(t) \int_{S_i} dS \implies \Phi_m^{\text{ext}}(t) = N B(t) S = N \pi a^2 B(t)$$

Finalmente, el flujo magnético total a través de la bobina circuitada de autoinducción L , sometida al campo magnético externo variable $\vec{B}_{\text{ext}} = B(t) \vec{k}$ y recorrida por una corriente de intensidad $I(t)$, es:

$$\Phi_m(t)]_{\Sigma} = \Phi_m^{\text{ext}}(t) + \Phi_m^{\text{cor}}(t) = N \pi a^2 B(t) + L I(t)$$

2.2 Condiciones para corriente estacionaria en la bobina

En la expresión anterior, la función del tiempo $B(t)$ es la característica del campo magnético externo aplicado y, por tanto, independiente de la bobina. De hecho, va a actuar como la causa que tendrá como efecto la corriente eléctrica de intensidad $I(t)$ que recorre la bobina cortocircuitada, pero sin estar conectada a generador alguno.

Aplicando las leyes del electromagnetismo que repasamos en el preámbulo, se obtiene:

$$I(t) = \frac{1}{R} \mathcal{E}(t) \Big|_{\partial\Sigma} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m(t)}{dt} \Big|_{\Sigma} \implies I(t) = -\frac{1}{R} \left[N\pi a^2 \frac{dB(t)}{dt} + L \frac{dI(t)}{dt} \right]$$

... que es la ecuación diferencial de primer orden que establece la relación entre la causa $B(t)$ (el campo externo), y el efecto que produce, $I(t)$ (la intensidad de la corriente inducida).

En el ejercicio se plantea la cuestión de cómo debe ser la componente $B(t)$ del campo magnético externo variable, para que produzca como efecto una corriente estacionaria de intensidad constante, I_0 . Obviamente, causa y efecto deben verificar la anterior ecuación diferencial; por tanto...

$$\left. \begin{array}{l} I(t) = I_0 \\ \frac{dI(t)}{dt} = 0 \end{array} \right\} \forall t \iff \vec{B}_{\text{ext}}(t) = B(t) \vec{k}, \text{ tal que } RI_0 = -N\pi a^2 \frac{dB(t)}{dt}$$

Es decir, la componente del campo externo debe ser una función del tiempo tal que su derivada sea una constante negativa. En consecuencia, $B(t)$ debe variar linealmente en el tiempo:

$$\vec{B}_{\text{ext}}(t) = B(t) \vec{k}, \text{ tal que } B(t) = \int \dot{B}(t) dt = B_0 - \frac{RI_0}{N\pi a^2} t$$

donde B_0 es cualquier valor constante. También hay que puntualizar que, en general, la corriente estacionaria de intensidad I_0 se establecería tras un cierto período transitorio. Se puede demostrar que la duración de dicho período transitorio estaría determinada por los valores de autoinducción y resistencia de la bobina. Si suponemos que inicialmente el campo externo es constante (y, por tanto, nula la intensidad de corriente en la bobina), y en un cierto instante $t = 0$ se inicia la variación temporal de $B(t)$ según la anterior ley horaria, se tendrá...

$$I(t) = I_0, \quad \forall t \gg \tau = L/R$$

2.3 Energía almacenada y potencia disipada

Cuando en un circuito de autoinducción L se establece una corriente eléctrica, cuya intensidad pasa desde un valor inicial nulo hasta que en un cierto instante t alcanza un cierto valor $I(t)$, es necesario suministrar una energía extra, que se denomina **energía magnética**, y cuyo valor es...

$$W_m[0 \rightarrow I(t)] = \int_0^{I(t)} LI dI = \frac{1}{2} LI^2(t)$$

Por tanto, una vez alcanzada la corriente eléctrica estacionaria en el sistema bajo estudio, la energía magnética almacenada en la bobina será:

$$W_m[0 \rightarrow I_0] = \int_0^{I_0} LI dI = \frac{1}{2} LI_0^2$$

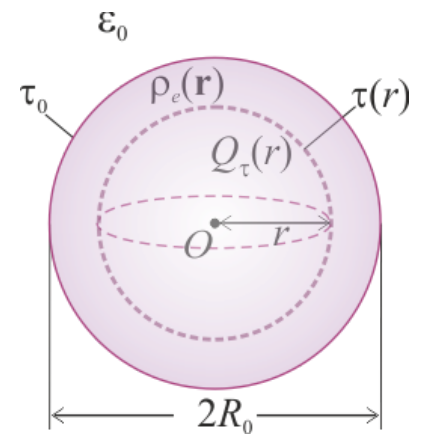
Esta energía extra es la necesaria para establecer el campo magnético estacionario \vec{B}_{cor} creado por la corriente I_0 en la bobina.

En cuanto a la **potencia disipada** por efecto Joule (es decir, energía perdida por unidad de tiempo en la bobina debido a la resistencia eléctrica del cable), cuando se alcanza el estado estacionario es...

$$I(t) = I_0 \implies \mathcal{P}_{\text{Jou}} = \left| \frac{dW_{\text{dis}}}{dt} \right|_{\partial\Sigma} = RI_0^2$$

1 Enunciado

En una esfera τ_0 de radio R_0 y centro en O , existe una distribución no uniforme de carga eléctrica negativa descrita por una densidad volumétrica radial $\rho_e(r)$, respecto del punto O , de manera que r es la distancia desde dicho centro al punto P donde se mide la densidad de carga. Dicha distribución es tal que si consideramos una región esférica τ con centro en O y radio $r \leq R_0$, la cantidad parcial de carga contenida en τ es $Q_\tau = -Q_0 (r/R_0)^2 = Q_\tau(r)$. No hay más cargas en el sistema.



1. ¿Cómo es la componente radial del campo eléctrico $E(r)$ creado por la distribución descrita, tanto dentro como fuera de la esfera τ_0 ?
2. ¿Cómo es el potencial electrostático creado por la distribución en el exterior de τ_0 ? ¿Cuánto vale el potencial en el centro O ?

2 Solución

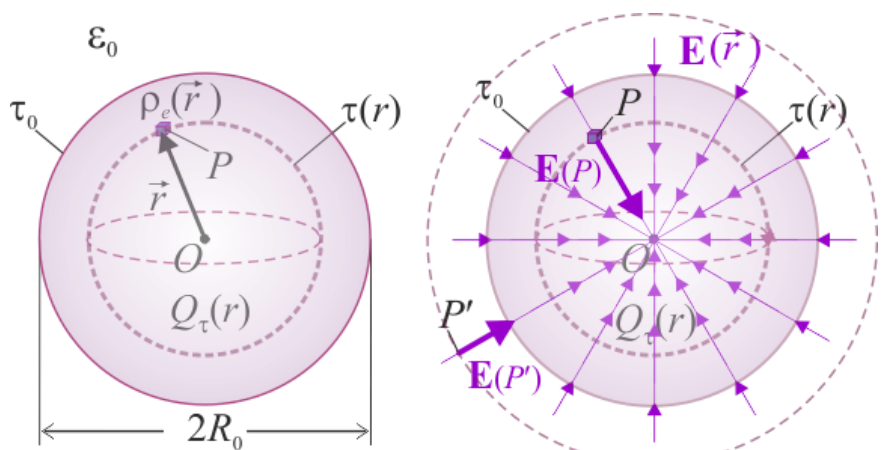
Planteamiento

Tomando un sistema de referencia con $OXYZ$ con origen en el centro O de la región esférica τ_0 , la distribución de carga eléctrica existente en el sistema estará descrita por una función densidad volumétrica que indica la cantidad de carga que por unidad de volumen hay en cada punto del espacio. Si para cada punto P del espacio definimos el radiovector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ que determina la posición de dicho punto respecto del centro O , se tendrá:

$$\rho_e(\vec{r}) = \left. \frac{dq}{d\tau} \right|_P = \begin{cases} \rho_e(r), & 0 \leq r < R_0 \\ 0, & R_0 < r \end{cases}$$

con $r = |\vec{r}|$. La función $\rho_e(r)$ no está especificada, pero podría calcularse a partir del dato proporcionado en el enunciado de que la cantidad parcial de carga eléctrica que hay en una esfera τ contenida en τ_0 , con centro en O y radio $r \leq R_0$, está descrita por la expresión:

$$Q_\tau(r) = -Q_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^2$$



En consecuencia, la cantidad total de carga en τ_0 es $-Q_0$. En cualquier caso, aún desconociendo a priori la expresión de la función $\rho_e(r)$, el hecho de que sea sólo dependa de la distancia r al centro O (distribución radial), nos permite asegurar que el campo eléctrico creado por dicha distribución en cualquier punto P del espacio va a presentar simetría radial con respecto a dicho punto. Es decir,

$$\vec{E}(P) = \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{u}_r(P); \quad \text{con } \vec{u}_r(P) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$$

Es decir, el campo eléctrico en un punto cualquiera del espacio, P , sólo tiene componente radial (en la dirección del radiovector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$), que depende de la distancia r al centro O de la distribución, pero no de otras variables geométricas. Y en el caso de campos que presentan este tipo de simetría, la expresión de dicha componente radial, $E(r)$, puede obtenerse mediante la **aplicación de la Ley de Gauss para el campo eléctrico**.

Esta ley fundamental de la Teoría Electromagnética establece que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada $\partial\tau$, es proporcional a la cantidad total de carga eléctrica que hay en el

volumen τ delimitado por aquélla. El valor de la constante de proporcionalidad depende del sistema de unidades utilizado para medir las magnitudes físicas; en el Sistema Internacional de unidades esta constante es $4\pi k_e = 1/\epsilon_0$, (inverso de la permitividad dieléctrica del vacío):

$$\Phi_e \Big|_{\partial\tau} = \oint_{\partial\tau} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \Big|_{\tau}$$

Por otra parte, la Ley de Gauss para el campo eléctrico expresa una relación cuantitativa entre dicha magnitud vectorial y sus fuentes escalares: es decir, las magnitudes escalares que producen campo eléctrico.

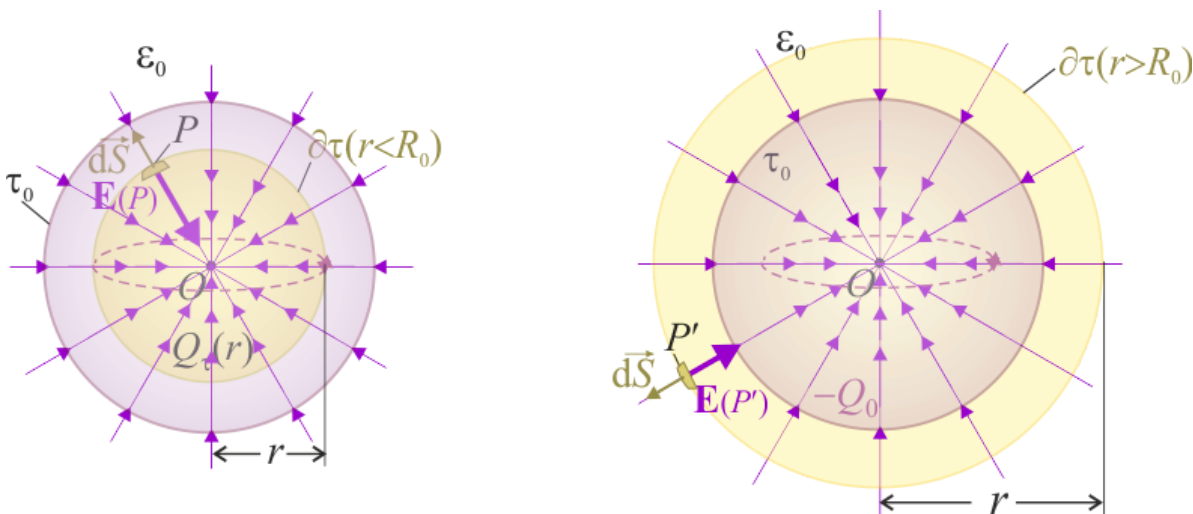
2.1 Cálculo de la componente radial del campo eléctrico

Para determinar la componente del campo con simetría radial mediante la ley de Gauss, ésta ha de aplicarse en una superficie cerrada con idéntica simetría. En el caso que nos ocupa hemos de considerar una superficie esférica $\partial\tau(r)$ con centro en O . Es decir, concéntrica con la distribución de carga que genera el campo y, por tanto, con el propio campo.

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie se obtiene calculando la integral, extendida a toda la superficie, del producto del campo en cada punto P de dS , multiplicado escalarmente por el vector elemento de superficie $d\vec{S}$ en dicho punto. Como se sabe, este vector tiene módulo infinitesimal dS (área del entorno del punto), dirección perpendicular al plano tangente a la superficie en P y, por convenio, orientado hacia el exterior del volumen delimitado por la superficie $\partial\tau$. Y puesto que en una superficie esférica de centro O , el radio OP es perpendicular al plano tangente en P a la superficie $\partial\tau$, se tendrá que

$$P \in \partial\tau(r) \implies d\vec{S} \Big|_P = dS \vec{u}_r(P)$$

donde r es el radio de la superficie esférica $\partial\tau$ y, por tanto, la distancia desde el centro O a todos y cada uno de los puntos de dicha superficie.



El vector unitario radial $\vec{u}_r(P)$ es exactamente el mismo tanto en la expresión del vector elemento de superficie como del campo (por estar evaluados ambos en el mismo punto P de la superficie). Por otra parte, puesto que la componente radial $E(r)$ sólo depende la distancia al centro O , dicha componente tendrá igual valor en todos los puntos de $\partial\tau$. Por tanto, se obtiene...

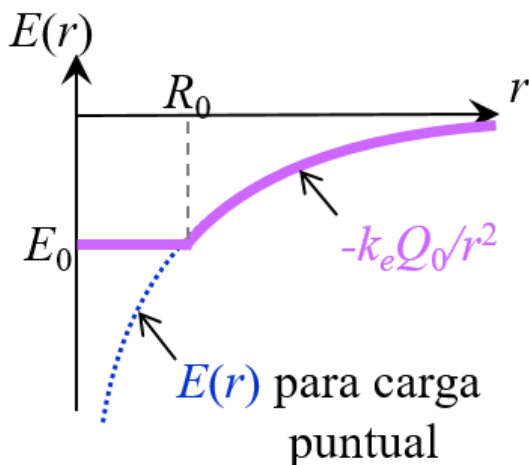
$$\forall P \in \partial\tau(r), \quad \vec{E} \cdot d\vec{S} \Big|_P = [E(r)\vec{u}_r(P)] \cdot [dS\vec{u}_r(P)] = E(r)dS \implies \Phi_e \Big|_{\partial\tau} = \oint_{\partial\tau} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \oint_{\partial\tau} dS = E(r) 4\pi r^2$$

Este resultado es válido independientemente de que r sea mayor o menor que R_0 (radio de la distribución de carga). Sin embargo, la cantidad de carga contenida dentro de la superficie esférica $\partial\tau(r)$, sí va a depender del valor del radio de esta. Si el radio es menor que el de la distribución de carga eléctrica, la cantidad de carga contenida es proporcional al cuadrado del radio, tal como se incide en el enunciado. Si el radio de la superficie gaussiana cerrada $\partial\tau(r)$ es mayor o igual que el de τ_0 , la cantidad de carga contenida será $-Q_0$:

$$Q]_{\tau} = \begin{cases} Q_{\tau}(r) = -Q_0 \frac{r^2}{R_0^2}; & \text{si } r < R_0 \quad (\tau \subset \tau_0) \\ -Q_0; & \text{si } R_0 \leq r \quad (\tau_0 \subset \tau) \end{cases}$$

Aplicando ahora la ley de Gauss, se obtiene...

$$\Phi_e]_{\partial\tau} = \frac{Q}{\varepsilon_0}]_{\tau} \implies 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} -\frac{Q_0 r^2}{\varepsilon_0 R_0^2}; & \text{si } r < R_0 \\ -\frac{Q_0}{\varepsilon_0}; & \text{si } R_0 \leq r \end{cases} \implies E(r) = \begin{cases} -\frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 R_0^2}; & \text{si } r < R_0 \\ -\frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2}; & \text{si } R_0 \leq r \end{cases}$$



Por tanto, la distribución de carga en τ_0 genera un campo eléctrico radial en todo el espacio, expresado por la siguiente función de campo:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -k_e \frac{Q_0}{R_0^2} \vec{u}_r(P) = \vec{E}_{\text{int}}(\vec{r}); & \text{si } r < R_0 \\ -k_e \frac{Q_0}{r^2} \vec{u}_r(P) = \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}); & \text{si } R_0 \leq r \end{cases} \quad \text{con } \vec{u}_r(P) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|}$$

Es decir, en los puntos interiores a la distribución la intensidad del campo **es constante**; mientras que en los puntos exteriores el campo es **idéntico al de una carga puntual** $-Q_0$ localizada en el centro O de τ_0 .

2.2 Potencial electrostático

Este resultado nos permite identificar de forma inmediata cómo va a ser el campo potencial electrostático $V(\vec{r})$ en puntos exteriores a la distribución. Puesto que dicho potencial está relacionado directamente con el campo eléctrico por las relaciones,

$$V(\vec{r}) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C \iff \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

si el campo eléctrico en puntos exteriores a τ_0 es el mismo al de una carga puntual situada en O , en esa región el potencial electrostático debe ser también el correspondiente a dicha distribución simple de carga... salvo una constante C cuyo valor puede fijarse arbitrariamente:

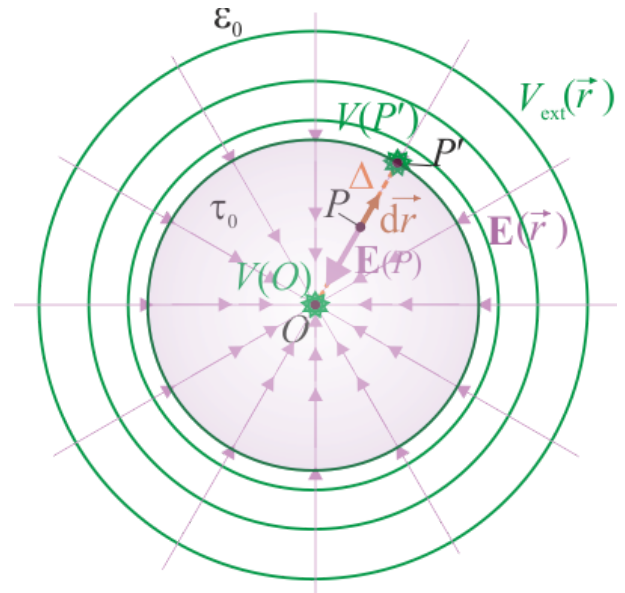
$$\forall P \notin \tau_0, \quad V(P) = -k_e \frac{Q_0}{r} + C = V_{\text{ext}}(r); \quad \text{con } r = |\vec{OP}| \geq R_0$$

El dominio de definición de esta función se extiende hasta puntos infinitamente alejados de la distribución de carga. Asumiendo ésta no va producir efectos apreciables en dichos puntos y que, por tanto, el potencial se anula allí, se tendrá que...

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{ext}}(r) = C = 0 \implies \forall P \notin \tau_0, \quad V(P) = V_{\text{ext}}(r) = -k_e \frac{Q_0}{r}; \quad \text{con } r = |\vec{OP}| \geq R_0$$

Valor del potencial en el centro de la distribución

La expresión anterior permite determinar también el valor del potencial en cualquier punto P' de la superficie $\partial\tau_0$ de la esfera cargada:



$$\forall P' \in \partial\tau_0, \text{ tal que } r = R_0 \implies V(P') = V_{\text{ext}}(R_0) = -k_e \frac{Q_0}{R_0}$$

Entonces, el valor del potencial en el centro O puede ser calculado sin más que aplicar la definición de diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V(O) - V(P') = \int_O^{P'} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Como se sabe, si el campo eléctrico es producido exclusivamente por cargas electrostáticas, el valor de la circulación del campo eléctrico que aparece en la expresión anterior es independiente del camino seguido. Elijamos, por tanto, un camino que nos permita el cálculo sencillo de dicha integral: el radio Δ que va desde el centro O al punto P' de la superficie $\partial\tau_0$. En ese caso, el campo eléctrico ha de ser evaluado siempre en puntos interiores de τ_0 , donde comprobamos que existía un campo radial pero de igual módulo en todos ellos, $\vec{E}_{\text{int}}(\vec{r})$. Además, a lo largo de esta trayectoria, el vector diferencial de camino $d\vec{r}$ sólo tiene componente radial (es decir, es paralelo al campo eléctrico en cada punto de la misma), y su módulo va a ser una variación infinitesimal de la distancia al centro O :

$$V(O) = V(P') + \int_{O(\Delta)}^{P'} \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{r}; \quad \text{con } d\vec{r}]_{\Delta} = dr \vec{u}_r(P), \quad \forall P \in \Delta$$

En consecuencia...

$$\vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{r}]_{P \in \Delta} = -k_e \frac{Q_0}{R_0^2} dr \implies \underbrace{V(O)}_{V(P')} = -k_e \frac{Q_0}{R_0} - k_e \frac{Q_0}{R_0^2} \int_0^{R_0} dr = -2 k_e \frac{Q_0}{R_0}$$

1 Enunciado

Se tiene un solenoide largo de radio 5.00 cm y longitud 1.00 m, con un cable arrollado en 5000 vueltas, por el que circula una corriente variable en el tiempo de la forma $I(t) = I_0 \cos(2\pi ft)$, con $I_0 = 1.00$ A y $f = 50.0$ Hz. Calcula el campo eléctrico creado en el interior y el exterior del solenoide.

2 Solución

La ley de Faraday puede escribirse así. Consideramos una curva cerrada Γ

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

siendo Φ_m el flujo magnético a través de una superficie S_{Γ} que se apoye en la curva cerrada Γ .

El significado físico de esta ley es que un campo magnético variable en el tiempo crea un campo eléctrico. Así pues, podemos tener campo eléctrico aunque no haya densidades de carga en el sistema.

En este problema el solenoide crea en su interior un campo magnético. Si el solenoide es largo, es decir, que su radio sea mucho menor que su longitud, el campo en su interior es uniforme y vale

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u} = \mu_0 \frac{N}{L} I(t) \vec{u}$$

N es el número de vueltas que da el cable, L es la longitud del solenoide ($n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud), μ_0 es la permeabilidad del vacío e $I(t)$ es la intensidad que circula por el cable. El vector \vec{u} es un vector unitario paralelo al eje del solenoide.

Si la intensidad que circula por el cable varía en el tiempo, el campo magnético en el interior del solenoide también lo hace. En el enunciado del problema se dice que la corriente es $I(t) = I_0 \cos(2\pi ft)$. Por tanto el campo magnético en el interior del solenoide puede expresarse como

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(2\pi ft) \vec{u}$$

con

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{L} I_0$$

Este campo magnético variable en el tiempo hace que aparezca un flujo magnético también variable en el tiempo. Este flujo es el que va a producir el campo eléctrico.

2.1 Campo en el exterior del solenoide

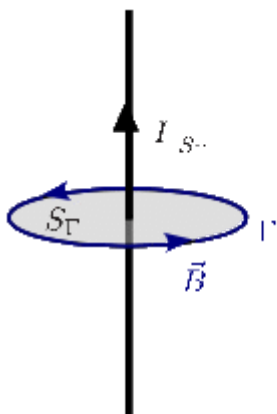
La geometría del problema es similar a la que teníamos al calcular el campo magnético de un hilo infinito por el que circula una corriente constante I . En este caso aplicamos la ley de Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I|_{S_{\Gamma}}$$

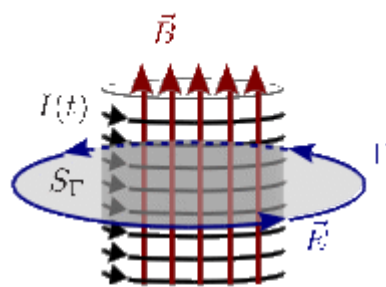
Sabemos por argumentos de simetría que las líneas de campo magnético son circunferencias con centro en el hilo. Escogemos como curva Γ una de estas circunferencias, y como superficie S_{Γ} el círculo definido por esa circunferencia.

Así, la corriente que atraviesa esa superficie es

$$I|_{S_{\Gamma}} = I$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I|_{S_{\Gamma}}$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_m}{dt}$$

En el caso del solenoide, el papel de la corriente lo realiza el campo magnético. Entonces las líneas de campo eléctrico serán circunferencias concéntricas con el solenoide, de forma similar a las líneas de campo magnético alrededor del hilo de corriente.

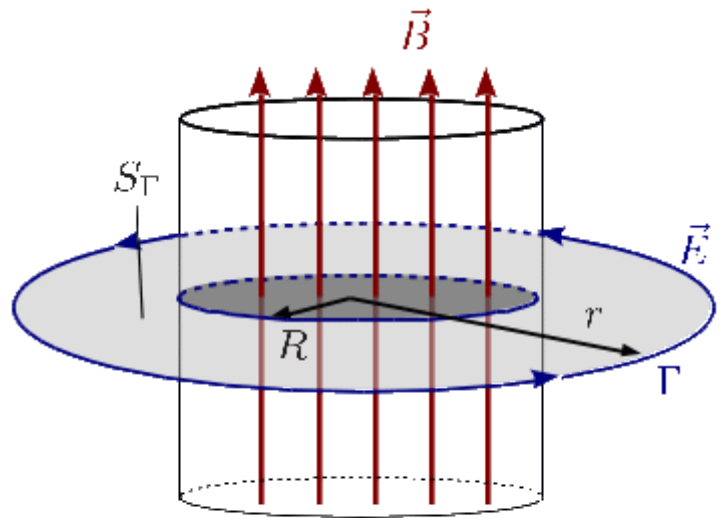
Tenemos entonces que el campo eléctrico es de la forma

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_{\phi}$$

siendo \vec{u}_{ϕ} el vector de las coordenadas polares. Sabiendo esto, vamos a aplicar la ley de Faraday sobre una circunferencia concéntrica con el solenoide de radio $r > R$. Esta circunferencia coincide con la línea de campo eléctrico. Entonces, la integral de línea es

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} E(r,t) dl = E(r,t) \oint_{\Gamma} dl = 2\pi r E(r,t)$$

En el lado derecho de la Ley de Faraday tenemos el flujo magnético que atraviesa una superficie apoyada en la línea. Escogemos como superficie el círculo S_{Γ} indicado en la figura. El campo magnético sólo atraviesa este círculo en la parte de este que está dentro del solenoide. Por tanto el flujo magnético a través de la superficie S_{Γ} es



$$\Phi_m = \int_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = B(t) \pi R^2 = B_0 \pi R^2 \cos(2\pi ft)$$

La derivada respecto al tiempo del flujo magnético es

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = 2\pi^2 f B_0 R^2 \sin(2\pi ft)$$

Ahora podemos igualar las dos expresiones

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow 2\pi r E(r,t) = 2\pi^2 f B_0 R^2 \sin(2\pi ft)$$

De aquí obtenemos el campo eléctrico en el exterior del solenoide

$$\vec{E} = \frac{\pi f B_0 R^2}{r} \sin(2\pi ft) \vec{u}_{\phi}$$

El campo decrece con la distancia r al eje del solenoide.

2.2 Campo eléctrico en el interior del solenoide

Ahora escogemos una circunferencia de radio $r < R$ para aplicar la Ley de Faraday. El lado izquierdo de la Ley es igual que en el apartado anterior

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} E(r,t) dl = E(r,t) \oint_{\Gamma} dl = 2\pi r E(r,t)$$

Ahora el campo magnético atraviesa toda la superficie S_Γ , pues el círculo está por dentro del solenoide. Tenemos

$$\Phi_m = B(t) \pi r^2 = B_0 \pi r^2 \cos(2\pi f t)$$

Su derivada respecto del tiempo es

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = 2\pi^2 f B_0 r^2 \sin(2\pi f t)$$

Igualando los dos lados de la Ley de Faraday tenemos

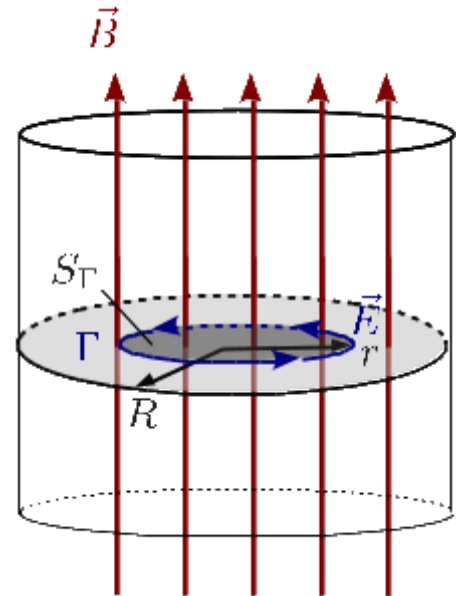
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow 2\pi r E(r,t) = 2\pi^2 f B_0 r^2 \sin(2\pi f t)$$

De aquí obtenemos el campo eléctrico en el exterior del solenoide

$$\vec{E} = \pi f B_0 r \sin(2\pi f t) \vec{u}_\phi$$

En el interior del solenoide el campo eléctrico es nulo en su eje y crece proporcionalmente a la distancia al eje.

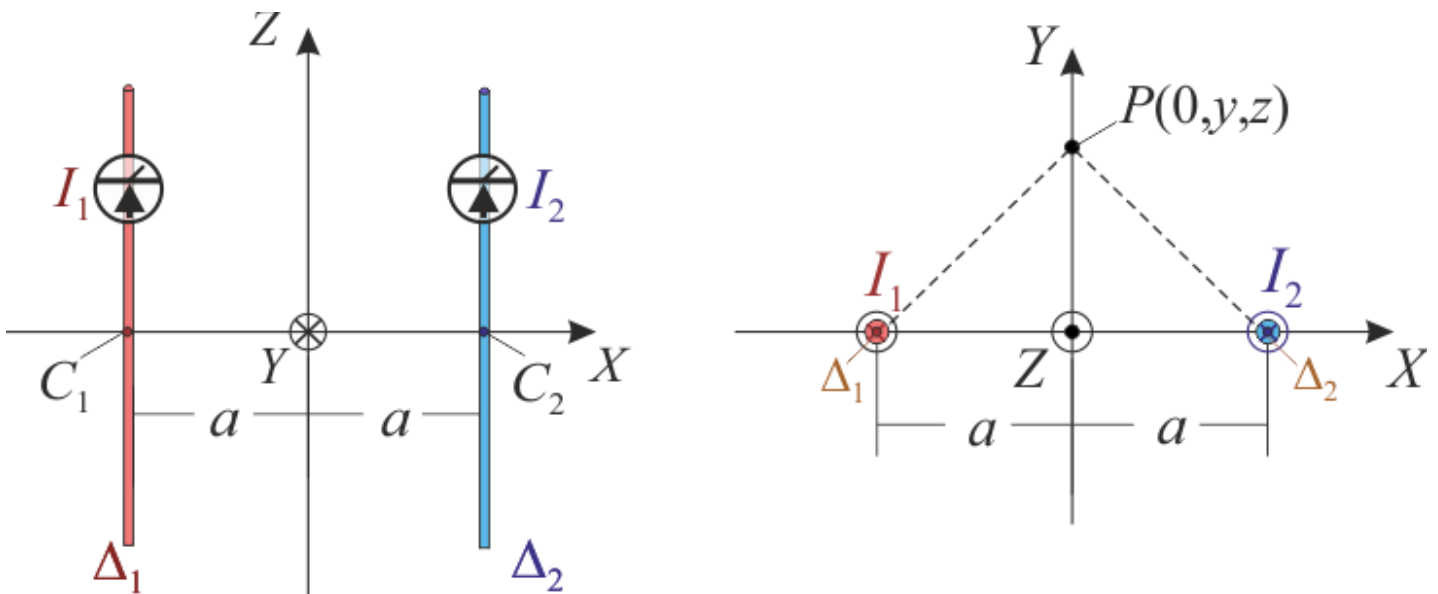
Podemos comprobar que el campo eléctrico es continuo cuando pasamos del interior al exterior del solenoide. Las expresiones del campo eléctrico en el exterior y el interior coinciden cuando $r = R$.



1 Enunciado

Dos conductores filiformes rectilíneos de longitud indefinida, Δ_1 y Δ_2 , están dispuestos en el plano OXZ , en paralelo al eje OZ y a igual distancia a de éste, de manera que pasan por los puntos $C_1(-a,0,0)$ y $C_2(a,0,0)$, respectivamente. Los conductores soportan sendas corrientes eléctricas cuyas intensidades, I_1 e I_2 , son medidas por amperímetros que indican valores positivos si las corrientes recorren los hilos en el sentido de "z" creciente, y negativos si lo hacen en el sentido de "z" decreciente. Describa cómo es la dirección, el sentido y el módulo del campo magnético total en los puntos de coordenadas $P(0,y,z)$ situados en el plano $\Pi_{OYZ} : x = 0$ (plano cartesiano OYZ), en las siguientes situaciones:

1. Las corrientes en los conductores son opuestas: $I_1 = -I_2 = I_0 > 0$.
2. Las corrientes en los conductores son iguales y descendentes: $I_1 = I_2 = -I_0 < 0$.

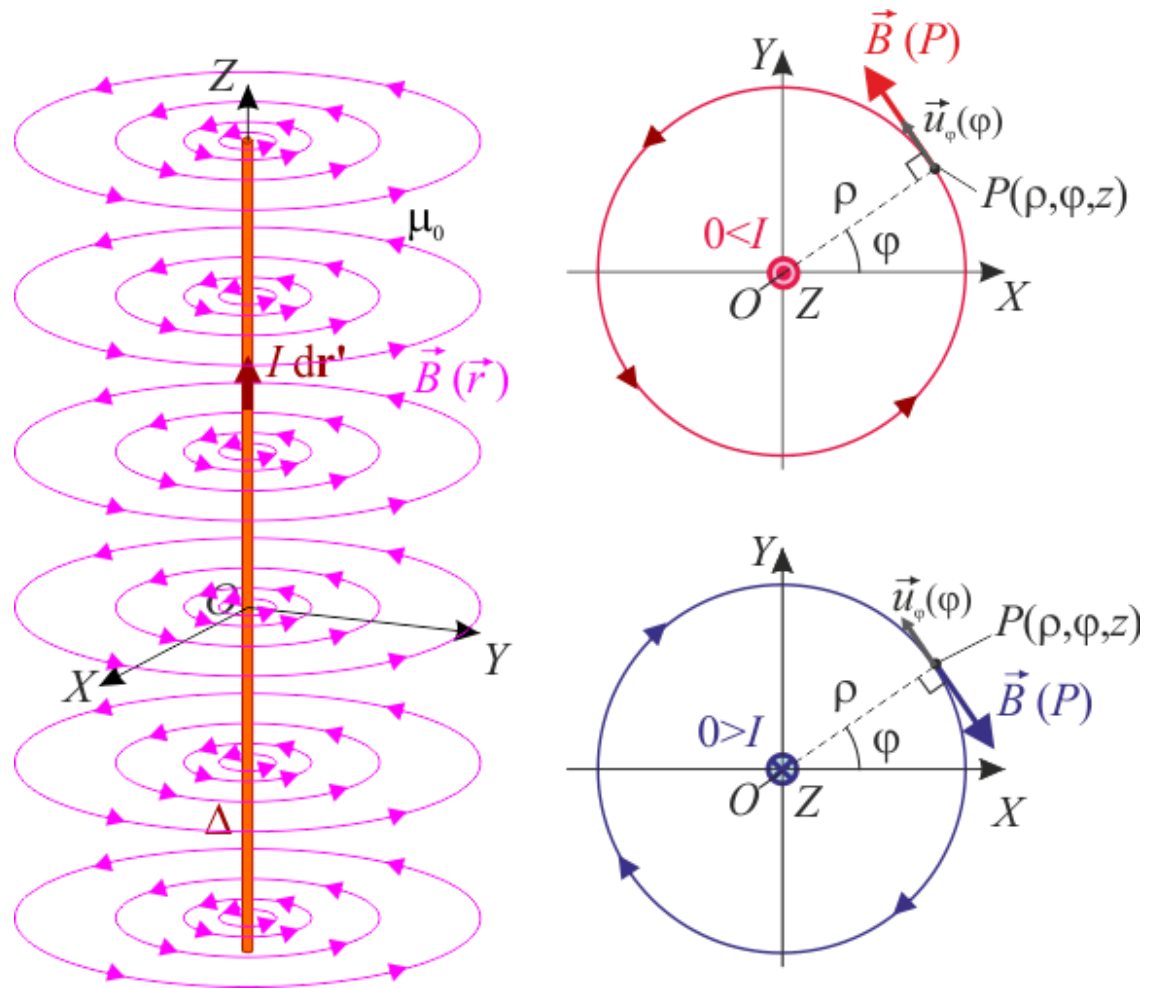


2 Solución

Campo magnético de corrientes en conductor filiforme rectilíneo

La ley de Biot y Savart proporciona la expresión del campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ creado por una corriente eléctrica estacionaria de intensidad I , que recorre un conductor filiforme, cualquiera que sea la geometría de éste. El caso particular de un conductor filiforme rectilíneo de longitud indefinida Δ ha sido analizado con detalle [en un ejercicio anterior](#). Como se vio, dicho campo presenta simetría cilíndrica respecto del conductor rectilíneo. Adoptando un sistema de referencia cuyo eje OZ coincida con el conductor Δ , y utilizando las coordenadas cilíndricas para determinar la posición de un punto $P(\rho, \varphi, z)$, se tendrá:

- el módulo del campo en un punto P sólo depende de su distancia ρ al conductor, siendo inversamente proporcional a dicha distancia (y



directamente proporcional a la intensidad de la corriente):

$$|\vec{B}(P)| = \frac{\mu_0 |I|}{2\pi \rho}$$

- su dirección en el punto P tiene la dirección tangente a la circunferencia contenida en un plano perpendicular al cable, con centro en éste y que pasa por P

$$\vec{B}(P) \parallel \pm \vec{u}_\varphi(\varphi) \perp \vec{k}$$

- el sentido del campo depende del sentido de la corriente eléctrica: si ésta recorre el conductor en el sentido creciente de la coordenada "z" ($I > 0$), las líneas del campo $\vec{B}(\vec{r})$ "giran" en sentido antihorario; si la corriente circula en el sentido decreciente de "z" ($I < 0$), el campo magnético "gira" en sentido horario.

En definitiva, la expresión vectorial del campo magnético en coordenadas cilíndricas es:

$$I \text{ en } \Delta \equiv OZ \implies \vec{B}(P) = \vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{u}_\varphi(\varphi)$$

Sistema de corrientes en dos conductores rectilíneos

En el ejercicio propuesto existen dos conductores filiformes Δ_1 y Δ_2 recorridos por sendas corrientes de intensidades I_1 e I_2 . Los campos magnéticos verifican el principio de superposición, por lo que el campo magnético resultante en cada punto será la suma vectorial de los por cada una de las corrientes rectilíneas por separado:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \text{ en } \Delta_1 \\ I_2 \text{ en } \Delta_2 \end{array} \right\} \implies \vec{B}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P)$$

Para la obtención de las expresiones analíticas del campo resultante es necesario proceder primero a redefinir el sistema de referencia, ya que el eje OZ no puede estar localizado simultáneamente en los dos conductores rectilíneos. Y puesto que ambos son paralelos, separados por una distancia $2a$, una adecuada elección del sistema de referencia $OXYZ$ podría ser la indicada en el enunciado: el eje OZ paralelo a los hilos conductores, de manera que éstos estén contenidos en el plano $\Pi_{OXZ} : y = 0$ (plano OXZ). Además, el $\Pi_{OYZ} : x = 0$ (plano OYZ) va a ser el plano de simetría del sistema, de manera que cada punto $P(0,y,z)$ de dicho plano equidista de ambos conductores.

Los vectores que describen los campos magnéticos creados por cada una de las corrientes en un punto arbitrario $P(x,y,z)$ se pueden expresar analíticamente en términos de la base cartesiana. Por otra parte, como se ha tomado el eje OZ paralelo a ambos conductores, y éstos se consideran de longitud infinita, el campo magnético resultante en cualquier punto del espacio va a presentar las siguientes propiedades: es perpendicular a dicho eje, y sus componentes no van a ser función de la coordenada "z"

$$\Delta_1 \parallel \vec{k} \parallel \Delta_2 \implies \vec{B}_1(P) \perp \vec{k} \perp \vec{B}_2(P) \implies \vec{B}(P) = B_x(x,y) \vec{i} + B_y(x,y) \vec{j} \perp \vec{k}$$

Es decir, la distribución del campo magnético es idéntica en todos los planos paralelos al plano $\Pi_{OXY} : z = 0$. Por tanto, obtendremos dicho campo en un plano paralelo a aquél, donde todos los puntos tienen igual valor (arbitrario) en la coordenada "z". Por otra parte, nuestro interés se centra en los puntos del plano Π_{OYZ} , con coordenada $x = 0$, y para los que el valor de la coordenada "y" puede expresarse en función de la distancia fija a que separa los conductores del plano de simetría Π_{OYZ} , y la distancia variable ρ existente entre un punto $P(0,y,z)$ de dicho plano y los conductores; como ya se discutió, esta distancia ρ es idéntica para ambos conductores. Recuérdese que el módulo de los campos magnéticos creados por cada una de las corrientes es función de dicha distancia:

$$P(0,y,z) \in \Pi_{OYZ} \implies \rho = \sqrt{a^2 + y^2}, \text{ tal que } |\vec{B}_i(0,y,z)| = \frac{\mu_0 |I_i|}{2\pi \rho} = B_i(\rho)$$

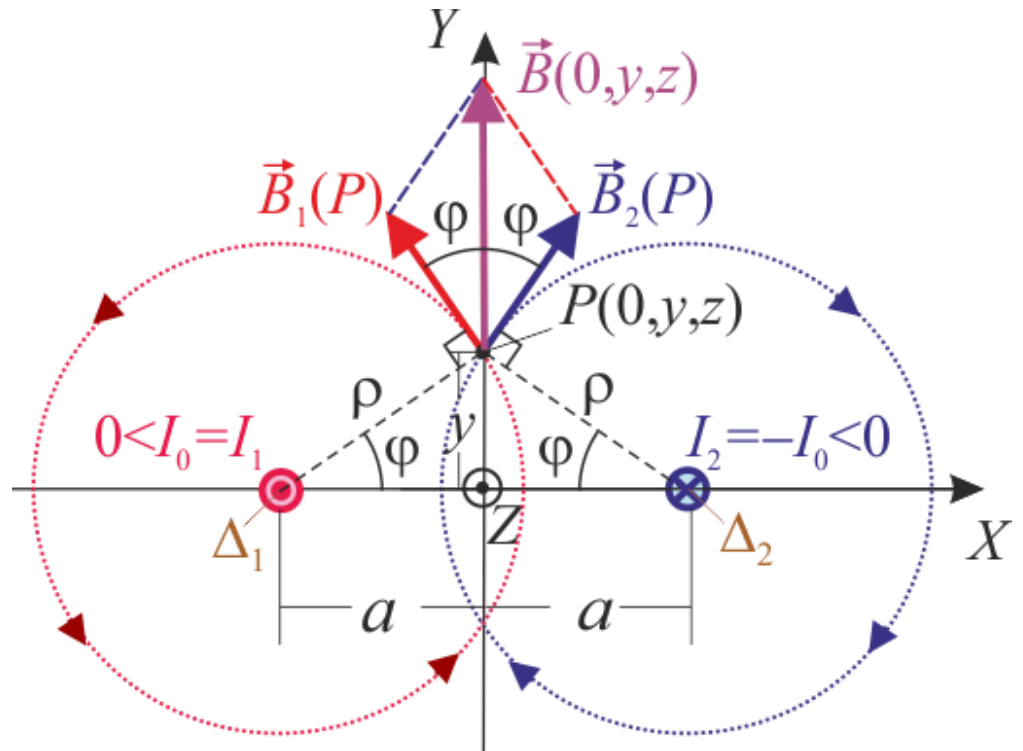
Analícemos los dos supuestos planteados en el enunciado:

2.1 Caso de corrientes estacionarias antiparalelas

Consideramos el caso en que las corrientes que recorren los conductores filiformes son antiparalelas. Para la disposición de los amperímetros especificada en el enunciado, en el conductor Δ_1 la intensidad de corriente es positiva, y negativa la soportada por el conductor Δ_2

$$I_1 = I_0 = -I_2 > 0$$

En la figura se muestra la orientación de los campos \vec{B}_1 y \vec{B}_2 en el punto $P(0,y,z)$, de acuerdo con la discusión realizada anteriormente: el primero "gira" en sentido antihorario en torno a Δ_1 , mientras que el segundo lo hace en sentido horario en torno a Δ_2 .



Sea φ el ángulo que forma el plano Π_{Oxz} con los planos que contienen al punto $P(0,y,z)$ y a cada uno de los conductores rectilíneos. Se cumplirá:

$$P(0, y, z) \in \Pi_{OYZ} \implies \begin{cases} y = \rho \operatorname{sen} \varphi \\ a = \rho \operatorname{cos} \varphi \end{cases}$$

Se puede comprobar que ambos campos $\vec{B}_1(P)$ y $\vec{B}_2(P)$ forman idéntico ángulo φ con el plano paralelo al Π_{Oxz} que contiene al punto $P(0,y,z)$, pero cada uno a un lado de dicho plano (véase la figura). Por tanto,

$$\vec{B}_1(0, y, z) = B_1(\rho) \left(-\operatorname{sen} \varphi \vec{i} + \operatorname{cos} \varphi \vec{j} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \rho} \left(-\operatorname{sen} \varphi \vec{i} + \operatorname{cos} \varphi \vec{j} \right)$$

$$\vec{B}_2(0, y, z) = B_2(\rho) \left(\operatorname{sen} \varphi \vec{i} + \operatorname{cos} \varphi \vec{j} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \rho} \left(\operatorname{sen} \varphi \vec{i} + \operatorname{cos} \varphi \vec{j} \right)$$

Por tanto, el campo magnético resultante en los puntos del plano Π_{OYZ} es:

$$\vec{B}(0, y, z) = \vec{B}_1(0, y, z) + \vec{B}_2(0, y, z) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi \rho} \cos \varphi \vec{j} \implies$$

$$\vec{B}(0, y, z) = \frac{\mu_0 I_0 a}{\pi \rho^2} \vec{j} = \frac{\mu_0 I_0 a}{\pi (a^2 + y^2)} \vec{j}$$

Obsérvese que el campo magnético resultante en todos los puntos de dicho plano tiene la dirección del eje OY , con el sentido del vector unitario \vec{j} . Es decir,

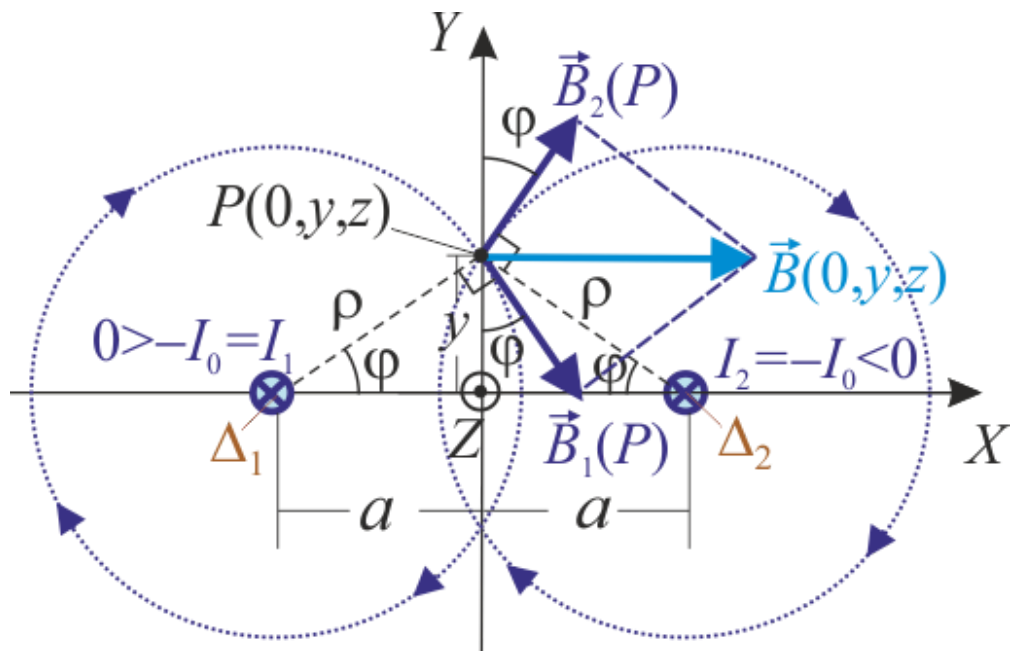
$$\vec{B}(0, y, z) = \vec{B}(0, -y, z) \parallel + \vec{j}$$

2.2 Caso de corrientes estacionarias paralelas

Consideramos el caso en que las corrientes que recorren los conductores filiformes son paralelas, ambas negativas (es decir, recorren los conductores en sentido de la "z" decreciente):

$$I_1 = I_2 = -I_0 < 0$$

En la figura se muestra la orientación de los campos \vec{B}_1 y \vec{B}_2 en el punto $P(0, y, z)$, para esta nueva configuración de las corrientes. Ambos "giran" en sentido horario en torno a sus correspondientes corrientes rectilíneas.



Utilizando de nuevo el ángulo φ definido en el apartado anterior se observa que, en el punto $P(0, y, z)$, los campos $\vec{B}_1(P)$ y $\vec{B}_2(P)$ se encuentran ambos al mismo lado del plano Π_{OYZ} , formando idéntico ángulo φ con éste (ver figura). Las expresiones analíticas de estos campos es:

$$\vec{B}_1(0, y, z) = B_1(\rho) \left(\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \rho} \left(\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j} \right)$$

$$\vec{B}_2(0, y, z) = B_2(\rho) \left(\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \rho} \left(\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \right)$$

Y teniendo en cuenta que $\sin \varphi = y/\rho$, se obtiene la expresión para el campo magnético resultante en los puntos del plano Π_{OYZ} :

$$\vec{B}(0, y, z) = \vec{B}_1(0, y, z) + \vec{B}_2(0, y, z) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi \rho} \sin \varphi \vec{i} \implies$$

$$\vec{B}(0, y, z) = \frac{\mu_0 I_0 y}{\pi \rho^2} \vec{i} = \frac{\mu_0 I_0 y}{\pi (a^2 + y^2)} \vec{i}$$

Obsérvese que, en este caso, el campo magnético resultante en los puntos de dicho plano tiene la dirección del eje OX , con el sentido del unitario \vec{i} en los puntos donde $y > 0$, y sentido opuesto en $y < 0$. El campo magnético es nulo si particularizamos en los puntos del eje OZ , donde también se cumple $y = 0$:

$$\vec{B}(0, y, z) = -\vec{B}(0, -y, z) \parallel +\vec{i} \quad (y > 0)$$

$$\vec{B}(0, 0, z) = \vec{0}$$

1 Enunciado

Tenemos un condensador plano de placas circulares de radio $R = 2.30 \text{ cm}$ separadas por una distancia $d = 1.10 \text{ mm}$. Al condensador llega una corriente $I = 5.00 \text{ A}$. Calcula la el campo magnético generado en el interior del condensador.

2 Solución

La corriente que llega a las placas del condensador hace que aparezcan en ellas una densidades de carga eléctrica de la misma magnitud y de signo opuesto. Estas densidades de carga van aumentando con el tiempo, por lo que el campo eléctrico generado en el interior del condensador depende del tiempo. Entonces hay una corriente de desplazamiento en el interior del condensador. Según nos dice la Ley de Ampère-Maxwell, esta corriente de desplazamiento genera un campo magnético, que vamos a calcular.

En el interior del condensador no hay corriente de conducción, por lo que la Ley de Ampère-Maxwell se escribe

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_d = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Como la distancia entre placas es mucho menor que su radio, podemos suponer que el campo eléctrico es uniforme. La distribución de campo eléctrico en el condensador es similar a la del campo magnético en el interior de un solenoide en el problema 1. Allí vimos que ese campo magnético producía un campo eléctrico con líneas de campo en forma de circunferencia. Podemos hacer aquí la misma suposición. Así, las líneas de campo magnético en el interior del condensador son circunferencias y el campo es de la forma

$$\vec{B} = B(r, t) \vec{u}_{\varphi}$$

El vector \vec{u}_{φ} es el vector azimutual de las coordenadas polares y r es la distancia al eje central del condensador.

Para aplicar la Ley de Ampère-Maxwell escogemos como línea cerrada una circunferencia concéntrica con el eje del condensador, y como superficie el círculo definido por ella. El lado izquierdo de la Ley queda

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_{\Gamma} B(r, t) dl \\ &= B(r, t) \oint_{\Gamma} d\vec{l} = 2\pi r B(r, t) \end{aligned}$$

El campo sale de la integral pues su módulo es el mismo en todos los puntos de la circunferencia.

Para el lado derecho, observamos que el flujo eléctrico que cuenta es el que pasa por dentro de la circunferencia. Esto es

$$\Phi_e = \int_{S_\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_\Gamma} E(t) dA = E(t) \int_{S_\Gamma} dA = \pi r^2 E(t)$$

El lado derecho de la Ley de Ampère-Maxwell queda

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

Igualando los dos términos de la Ley tenemos

$$2\pi r B(r, t) = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

Despejando tenemos

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt}$$

En el problema anterior vimos que el campo eléctrico entre las placas del condensador es

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2}$$

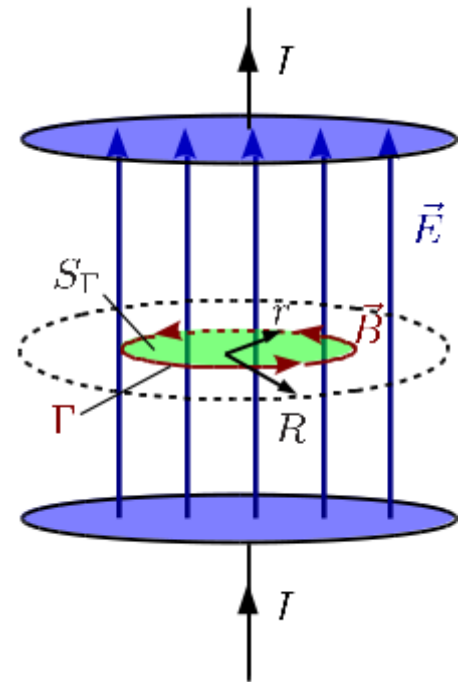
Aquí el área es el de toda la placa del condensador. Teniendo en cuenta la relación entre la intensidad y la carga en las placas tenemos

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \frac{1}{\epsilon_0 \pi R^2} \frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I(t)$$

El campo magnético es nulo en el eje del condensador y aumenta según nos acercamos al borde. El valor máximo se obtiene cuando $r = R$, es decir, justo en el borde de las placas. El valor numérico es

$$B(r = R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 4.35 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Como vemos es un campo muy pequeño.



1 Enunciado

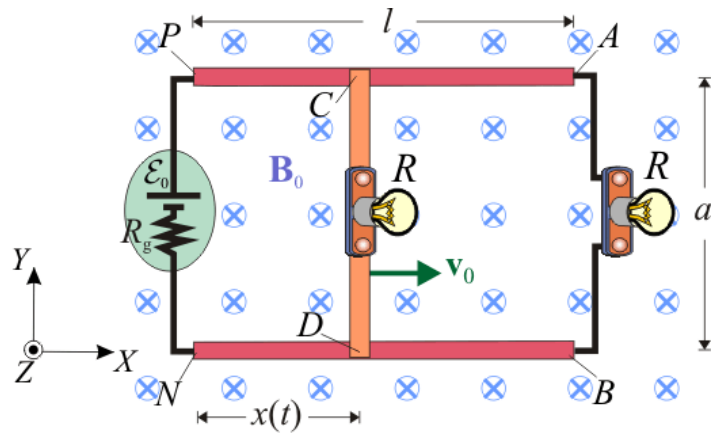
El circuito eléctrico de la figura está formado por dos regletas conductoras, ambas de longitud l , dispuestas en paralelo y separadas por una distancia fija a . Sus extremos de dichas regletas están conectados a los electrodos P y N de un generador d.c. (batería), cuya f.e.m. tiene un valor constante \mathcal{E}_0 y una resistencia interna R_g . Los otros extremos de las dos regletas, A y B , se conectan a través de una bombilla incandescente de resistencia R . Además, se tienen otros dos segmentos conductores, alineados y conectados por otra bombilla idéntica a la anterior, y con los extremos libres, C y D , siempre en contacto con las regletas. El resto de resistencias eléctricas del sistema son despreciables frente al valor R de las bombillas, excepto la resistencia interna del generador, que vale $R_g = R/2$. Todo el sistema está sometido a un campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0 = -B_0 \mathbf{k}$ perpendicular al plano OXY que contiene al circuito, y de sentido opuesto al eje OZ , tal como se indica en la figura.

Inicialmente, la rama conductora CD está en reposo, en contacto con los extremos de las regletas que se hallan conectados a la batería (P y N). En esta situación, obtenga las expresiones de las siguientes magnitudes en función de los parámetros indicados en el enunciado:

- Intensidad de corriente total suministrada por el generador, e intensidades en cada una de las ramas.
- Expresión de la energía que por unidad de tiempo se disipa en cada resistencia. ¿Cómo serán, comparativamente, las intensidades luminosas de las bombillas?

A partir de un cierto instante, la rama CD con bombilla incluida, se desplaza hacia la bombilla fija que cierra el circuito entre A y B , manteniéndose perpendicular a las regletas conductoras y alcanzando una velocidad constante de valor v_0 . En esta nueva situación, obtenga las expresiones de:

- Flujos magnéticos a través de las espiras $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$ y $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$, y fuerzas electromotrices inducidas en cada una de ellas.
- Ecuaciones del circuito en las espiras $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$.
- Intensidades de las corrientes eléctricas que recorren el generador y cada una de las dos bombillas. ¿Qué puede decir acerca de las intensidades luminosas de las bombillas en relación con las iniciales? ¿Podría llegar a apagarse alguna de ellas?



2 Solución

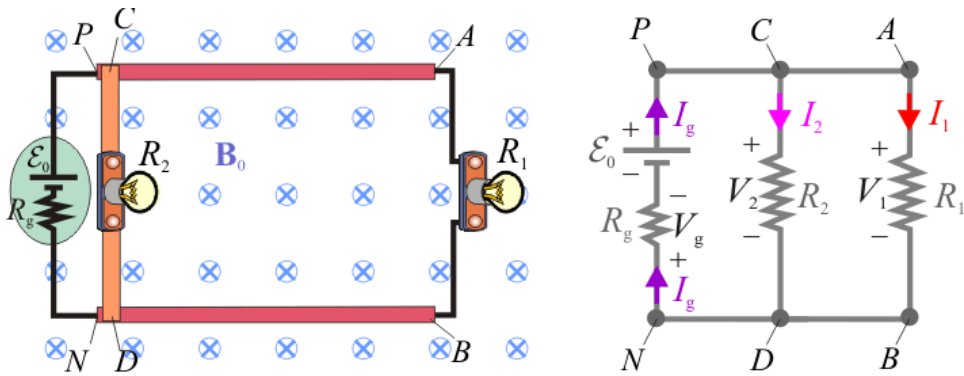
2.1 Situación estacionaria

Los apartados a) y b) del enunciado se corresponden con una situación estacionaria del sistema: el segmento conductor CD , con la bombilla permanece en reposo; por tanto, el flujo magnético del campo \mathbf{B}_0 a través del circuito permanece constante, por lo que la única fuerza electromotriz será la de la batería, que tiene un valor \mathcal{E}_0 , constante en el tiempo. Por consiguiente, en el circuito bajo estudio y en la situación descrita, se establecerán corrientes eléctricas estacionarias.

En el enunciado se indica que las resistencias eléctricas de las regletas y segmentos conductores son despreciables frente a las de las bombillas y las resistencia interna del generador. Por tanto, en el modelo simple del circuito bajo estudio, hay dos únicos nodos: el nodo "1", correspondiente a los puntos P , C y A , y el nodo "2" para los puntos N , D y B , ya que:

$$V_P - V_C = 0 = V_C - V_A; \quad V_B - V_D = 0 = V_D - V_N$$

Entre dichos nodos tenemos tres ramas paralelas: las correspondientes a los segmentos AB y CD , con las resistencias de las bombillas, R_1 y R_2 , ambas de igual valor R ; y la rama del generador de f.e.m. \mathcal{E}_0 y resistencia interna $R_g = R/2$.



La primera consecuencia de esto es que la diferencia de potencial entre los extremos son idénticas en las tres ramas. Por el contrario, la intensidad de la corriente eléctrica en cada una de las ramas será distinta, en general, estando determinada por dicha diferencia de potencial y el dispositivo localizado en ella:

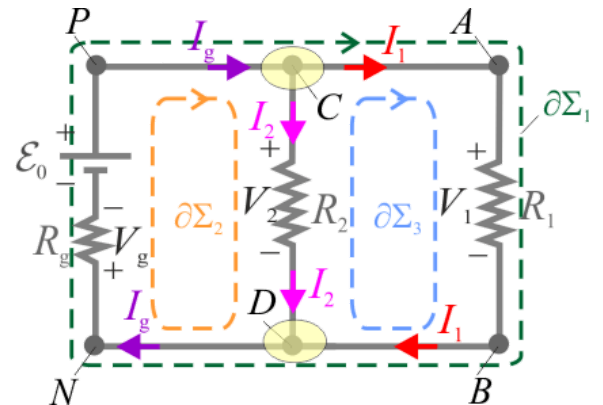
$$V_P - V_N = V_A - V_B = V_C - V_D; \quad \begin{cases} V_P - V_N = \mathcal{E}_0 - V_g = \mathcal{E}_0 - I_g R_g \\ V_A - V_B = V_1 = I_1 R_1 \\ V_C - V_D = V_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

2.1.1 Intensidades de corriente en el circuito

Estas magnitudes las determinaremos utilizando las leyes de Kirchoff. La primera establece que, una vez establecidos arbitrariamente los sentidos para las intensidades de las corrientes eléctricas que recorren cada rama, la suma de las intensidades que salen (llegan) de (a) cada nodo, es cero:

$$1^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \rightarrow -I_g + I_1 + I_2 = 0, \text{ en } C \text{ y } D$$

La segunda ley de Kirchoff establece que en cada una de las mallas del circuito, la suma de las f.e.m. es igual a la suma de las caídas de tensión. En el circuito bajo estudio se distinguen tres mallas que, recorridas en sentido horario (y para los sentidos arbitrarios atribuidos a las intensidades), proporcionan las siguientes ecuaciones:



$$2^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_0 = V_1 + V_g = I_1 R_1 + I_g R_g; \text{ en } \partial\Sigma_1 \equiv PABN \\ \mathcal{E}_0 = V_2 + V_g = I_2 R_2 + I_g R_g; \text{ en } \partial\Sigma_2 \equiv PCDN \\ 0 = V_1 - V_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2; \text{ en } \partial\Sigma_3 \equiv CABD \end{cases}$$

Obsérvese que estas ecuaciones no son linealmente independientes: si se suman la segunda y la tercera, se obtiene la primera ecuación.

Si combinamos la tercera de estas ecuaciones con la proporcionada por la primera ley de Kirchoff y utilizamos el dato relativo a los valores de las tres resistencias eléctricas de circuito, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} R_1 = R_2 = 2R_g = R \\ I_1 R_1 = I_2 R_2 \\ I_1 + I_2 = I_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I_g}{2}$$

Sustituyendo este resultado parcial en, por ejemplo, la ecuación del circuito en la malla $\partial\Sigma_1$, se obtiene:

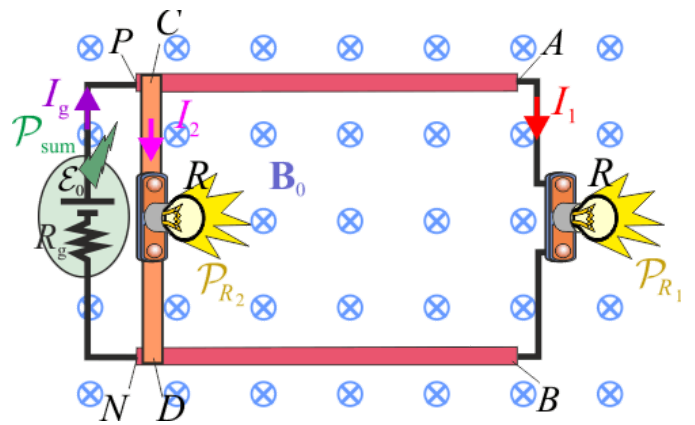
$$\mathcal{E}_0 = \frac{I_g}{2} R + I_g \frac{R}{2} = I_g R \Rightarrow I_g = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = 2I_1 = 2I_2$$

2.1.2 Potencias disipadas en las resistencias

Las bombillas son dispositivos resistivos que almacenan energía. Es decir, toda la energía eléctrica que llega a estas resistencias se disipa por efecto Joule. En consecuencia, la energía disipada por unidad de tiempo en cada una de las bombillas es igual a la potencia eléctrica instantánea que llega a las mismas asociada a la correspondiente corriente eléctrica:

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_i} = I_i V_i = I_i^2 R_i \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_1} = \mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_2} = \left(\frac{I_g}{2}\right)^2 R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{4R}$$



Es decir, en la situación estacionaria analizada, como las bombillas son idénticas (de igual resistencia) y las corrientes eléctricas que las recorren también son iguales, ambas disipan la misma cantidad de energía por unidad de tiempo. Y como su luminosidad va a depender de dicha potencia disipada, podemos concluir que ambas iluminan con igual intensidad.

Balance energético

Aunque no se solicita en el enunciado, realicemos el balance energético instantáneo en el circuito, comparando la potencia suministrada por el generador ($\mathcal{P}_{\text{sum}}|_g$) con la disipada en las resistencias eléctricas de las bombillas. La cantidad de energía que por unidad de tiempo suministra el generador en cada instante es igual al voltaje/diferencia de potencial entre los electrodos del generador, multiplicado por la intensidad de corriente instantánea que recorre este dispositivo. Si además de la f.e.m., el generador tiene una cierta resistencia interna, se tendrá:

$$\mathcal{P}_{\text{sum}}|_g = I_g (V_P - V_N) = \mathcal{E}_0 I_g - R_g I_g^2$$

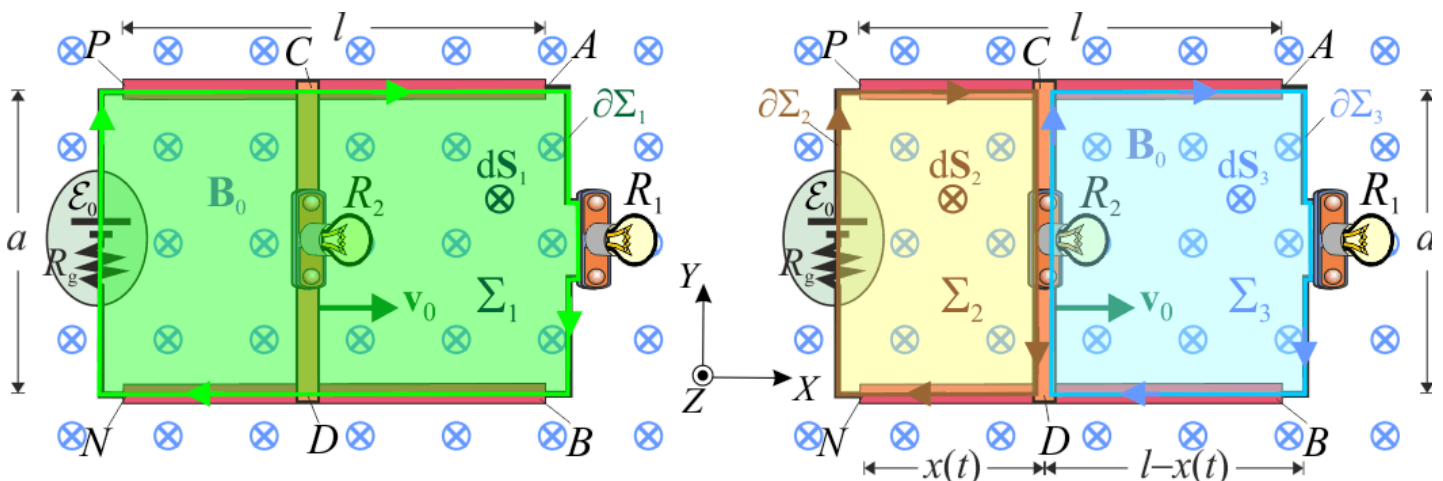
Es decir, no toda la energía que por unidad de tiempo se transforma en energía eléctrica en el generador, es suministrada al circuito: hay una parte que pierde en propio proceso de generación de la corriente, y cuyo valor coincidiría en cada instante con la que se disiparía en la virtual resistencia interna del generador, R_g . Sustituyendo los valores obtenidos en éste y en apartados anteriores, se comprueba que:

$$\mathcal{P}_{\text{sum}}|_g = \mathcal{E}_0 I_g - R_g I_g^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R} = \mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_1} + \mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_2}$$

Es decir, toda la energía suministrada en cada instante por el generador, se disipa en las dos bombillas conectadas en paralelo.

2.2 Bombilla en movimiento

Consideremos ahora la situación dinámica descrita en la segunda parte del enunciado: la bombilla R_2 se desplaza hacia la bombilla R_1 , con los extremos C y D de los segmentos conductores en contacto con las regletas PA y NB , respectivamente, de manera que el segmento CD se mantiene perpendicular a dichas regletas en el sistema de referencia cartesiano adoptado, la velocidad de la parte móvil está descrita por el vector $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$, constante. Y puesto que hay un campo magnético $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}$, perpendicular al plano que contiene al circuito, el movimiento de CD producirá flujos magnéticos, en general variables.



2.2.1 Flujos magnéticos y f.e.m. inducidas

Consideremos en primer lugar el circuito cerrado formado por los segmentos conductores PA y BN , con sus extremos conectado al generador y a la bombilla que permanece fija, R_1 ; es decir, se trata de la malla $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$. Para calcular el flujo del campo magnético estático a través de la superficie Σ_1 delimitada por dicha curva cerrada tomamos, en todo punto de dicha superficie, el elemento $d\mathbf{S}_1 = -dS \mathbf{k}$, lo cual implica que estamos estableciendo el sentido horario como sentido positivo para las corrientes eléctricas que recorren dicha malla. Teniendo en cuenta que el campo magnético es uniforme y que la malla $\partial\Sigma_1$ define en todo instante un rectángulo de lados a y l , se obtiene que el flujo magnético a través de Σ_1 tiene un valor constante:

$$\Phi_m|_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{\Sigma_1} B_0 dS \Rightarrow \Phi_m|_{\Sigma_1} = B_0 \int_{\Sigma_1} dS = B_0 a l = \Phi_1; \text{ cte.}$$

Consideremos ahora la malla formada por el segmento móvil CD que contiene a la bombilla R_2 , los fragmentos de regletas conductoras PC y DN , y el generador con los cables que cierran el circuito, formando la trayectoria conductora cerrada también $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$, que define el rectángulo Σ_2 que tiene un lado fijo, de longitud a , y otra que varía según la ley $x(t)$ determinada por el movimiento uniforme del segmento CD . El flujo magnético a través de dicho rectángulo será, por tanto, variable en el tiempo. Tomando nuevamente el sentido horario como sentido positivo para la circulación de las corrientes eléctricas en las ramas de $\partial\Sigma_2$, se tendrá que $d\mathbf{S}_2 = -dS \mathbf{k}$. Así, el flujo magnético a través de Σ_2 , en un determinado instante t , es:

$$\Phi_m|_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{\Sigma_2} B_0 dS \Rightarrow \Phi_m|_{\Sigma_2} = B_0 \int_{\Sigma_2(t)} dS = B_0 a x(t) = \Phi_2(t)$$

Aunque no se pide explícitamente en el enunciado, puede ser interesante comprobar qué ocurre con el flujo magnético a través del circuito cerrado, también variable, formado por el segmento móvil CD , los fragmentos de regletas conductoras CA y DB , y la bombilla fija, que definen la malla $\partial\Sigma_3 \equiv CABD$, y en la que nuevamente tomaremos el sentido horario como sentido positivo de la circulación:

$$\Phi_m|_{\Sigma_3} = \int_{\Sigma_3} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S}_3 = \int_{\Sigma_3} B_0 dS \Rightarrow \Phi_m|_{\Sigma_3} = B_0 \int_{\Sigma_3(t)} dS = B_0 a [l - x(t)] = \Phi_3(t)$$

Fuerzas electromotrices inducida en cada malla

En virtud de las leyes de Faraday y Lenz para la inducción electromagnética, en cada uno de los circuitos cerrados o mallas, aparece una fuerza electromotriz inducida por la existencia de flujos magnéticos variables a través de las superficies delimitadas por dichas mallas:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_i} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\Sigma_i} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_1} &= - \frac{d\Phi_1}{dt} = 0 \\ \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_2} &= - \frac{d\Phi_2}{dt} = -B_0 a \dot{x}(t) = -B_0 a v_0; \text{ cte.} \end{aligned}$$

Obsérvese que en el circuito variable $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$ se induce una f.e.m. no nula. Por el contrario, en $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$ no hay f.e.m. inducida, pues dicho circuito permanece invariable en la situación descrita, por lo que el flujo del campo uniforme se mantiene constante en el tiempo.

Análogamente, en la malla $\partial\Sigma_3 \equiv CABD$, habrá también una fuerza electromotriz inducida:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_3} = - \frac{d\Phi_3}{dt} = B_0 a \dot{x}(t) = B_0 a v_0; \text{ cte.}$$

Es decir, $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$ permanece invariable cuando se desplaza CD , por tanto el flujo del campo uniforme se mantiene constante en el tiempo y, en consecuencia no hay f.e.m. inducida. Por el contrario, en las mallas correspondientes a los circuitos variables $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$ y $\partial\Sigma_3 \equiv CABD$, se inducen sendas f.e.m. constantes y opuestas:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_2} &= -B_0 a v_0 = \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_3} &= B_0 a v_0 = \mathcal{E}_3 \end{aligned} \right\} \implies -\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = B_0 a v_0 = \mathcal{E}$$

medidas en ambas mallas en el sentido horario, determinado éste por la elección de los elementos de superficie $d\mathbf{S}_2 = d\mathbf{S}_3 = -dS\mathbf{k}$

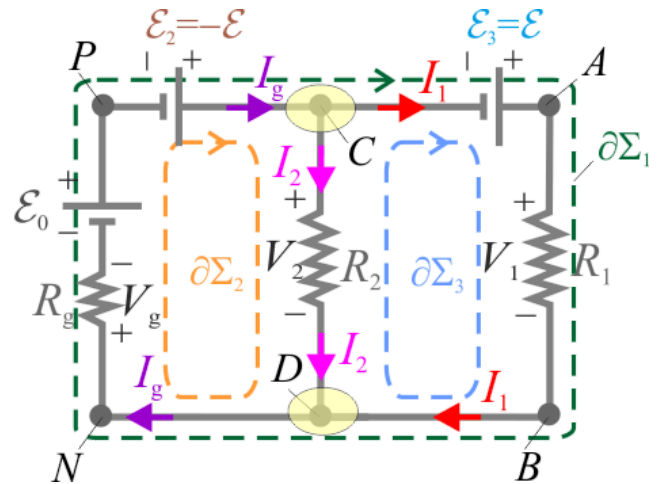
2.2.2 Ecuaciones del circuito

Modelo circuital del sistema con bombilla móvil

Para construir el modelo circuital equivalente del sistema cuando en éste se desplaza con velocidad uniforme el segmento conductor con bombilla CD , basta con añadir en las fuentes d.c. que modelan las las fuerzas electromotrices constantes que acabamos de determinar.

Y una vez construido este modelo, es fácil obtener las ecuaciones que gobiernan este circuito. En primer lugar, tenemos que todas las fuentes de voltaje son d.c., incluidas las f.e.m. que se inducen al moverse CD que, como hemos visto, son también constantes. En consecuencia, podemos asegurar que las corrientes en el circuito serán estacionarias, de manera que en los nodos C y D no variará la carga eléctrica almacenada; por tanto, tendrá que la suma de la intensidades de corriente que llegan o salen a/de cada uno de ellos, deben nulas. Es decir, tal como ocurría en el caso del sistema en reposo:

$$1^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \longrightarrow -I_g + I_1 + I_2 = 0, \text{ en } C \text{ y } D$$



Por su parte, la segunda ley de Kirchoff establece de nuevo que, en cada una de las mallas del circuito, la suma de las caídas de tensión ha de ser igual a las suma de todas las f.e.m. presentes en las malla, medidas ambas cantidades en el sentido horario predeterminado al calcular los flujos magnéticos:

$$2^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_2 = V_2 + V_g; \text{ en } \partial\Sigma_2 \equiv PCDN \longrightarrow \mathcal{E}_0 - \mathcal{E} = I_2 R_2 + I_g R_g \\ \mathcal{E}_3 = V_1 - V_2; \text{ en } \partial\Sigma_3 \equiv CABD \longrightarrow \mathcal{E} = I_1 R_1 - I_2 R_2 \\ \mathcal{E}_0 + \underbrace{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_1}=0} = V_1 + V_g; \text{ en } \partial\Sigma_1 \equiv PABN \longrightarrow \mathcal{E}_0 = I_1 R_1 + I_g R_g \end{cases}$$

En $\partial\Sigma_2$, la fuerza electromotriz total es igual a la suma de la f.e.m. constante de batería o generador real, más la inducida en dicha malla cuando se desplaza CD con velocidad constante. En $\partial\Sigma_3$ la única f.e.m. es la inducida por la variación del flujo magnético a través del circuito $CABD$. En la malla $\partial\Sigma_1$, las f.e.m. presentes son las del generador real más las inducidas en $\partial\Sigma_2$ y $\partial\Sigma_3$ al desplazarse CD ; y como éstas son opuestas, se tendrá que la f.e.m. total en dicho circuito es la \mathcal{E}_0 , pues la f.e.m. inducida neta es 0, tal como se comprobó en el apartado [apartado 2.2.1](#).

Ecuaciones del circuito

Obsérvese que las tres últimas ecuaciones no son linealmente independientes: si se suman las dos primeras, se obtiene como resultado la tercera. Es decir, sólo dos de estas ecuaciones pueden utilizarse para obtener los valores de las magnitudes eléctricas desconocidas en el sistema. En el enunciado se indica que se utilicen las correspondientes a las mallas $\partial\Sigma_2$ y $\partial\Sigma_1$; es decir, las ecuaciones primera y tercera:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 - \mathcal{E} = I_2 R_2 + I_g R_g \\ \mathcal{E}_0 = I_1 R_1 + I_g R_g \end{cases}$$

2.2.3 Intensidades de las corrientes eléctricas en el circuito

Sin embargo, en las dos ecuaciones anteriores hay tres incógnitas: las intensidades de las corrientes eléctricas en cada una de las ramas del circuito. Por tanto, se necesita una tercera ecuación que incluya dichas intensidades. Obviamente se trata de la proporcionada por la primera ley de Kirchoff. Estas tres ecuaciones describen completamente al sistema eléctrico bajo estudio, pues permiten determinar los valores de las intensidades de la

corrientes eléctricas que recorren dicho sistema, en términos de la f.e.m. del generador real, \mathcal{E}_0 , la f.e.m. inducida, $\mathcal{E} = B_0 a v_0$, y los valores de las resistencias eléctricas $R_1 = R_2 = 2R_g = R$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}_0 - B_0 a v_0 = R \left(I_2 + \frac{I_g}{2} \right) \\ \mathcal{E}_0 = R \left(I_1 + \frac{I_g}{2} \right) \\ 0 = I_1 + I_2 - I_g \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{E}_0 - B_0 a v_0 = 2R(I_1 + I_2) \\ B_0 a v_0 = R(I_1 - I_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = \frac{2\mathcal{E}_0 + B_0 a v_0}{4R} \\ I_2 = \frac{2\mathcal{E}_0 - 3B_0 a v_0}{4R} \\ I_g = \frac{2\mathcal{E}_0 - B_0 a v_0}{2R} \end{array}$$

Si comparamos estos resultados con la intensidades de corriente que obtuvimos en el [apartado 2.1.1](#), donde el sistema permanecía inmóvil, comprobamos...

$$I_1 > \frac{\mathcal{E}_0}{2R} = I_1^{\text{fijo}} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_1} = I_1^2 R > \frac{\mathcal{E}_0^2}{4R} = \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{fijo}} \Big|_{R_1}$$

es decir, la bombilla fija se ilumina más cuando el segmento CD se desplaza hacia aquella. Por el contrario,

$$I_2 < \frac{\mathcal{E}_0}{2R} = I_2^{\text{fijo}} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_2} = I_2^2 R < \frac{\mathcal{E}_0^2}{4R} = \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{fijo}} \Big|_{R_2}$$

Es decir, en la situación descrita la bombilla móvil ilumina con menos intensidad que cuando estaba en reposo. Incluso, existe un valor de velocidad del segmento CD para el cual esta bombilla llega a apagarse pues se anula la intensidad de la corriente que la recorre; mientras, la bombilla que permanece fija sí está iluminada:

$$v_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{3B_0 a} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = 0 \rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_2} = 0 \\ I_1 \neq 0 \rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_1} \neq 0 \end{cases}$$

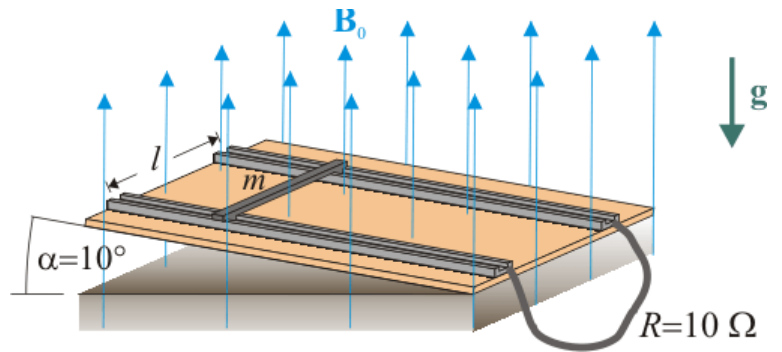
Otra conclusión que se desprende de los resultados obtenidos para las intensidades en el circuito móvil es:

$$v_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{B_0 a} \Rightarrow I_g = 0; I_1 \neq 0; I_2 \neq 0$$

Es decir, la batería dejaría de suministrar intensidad de corriente, sin embargo ambas bombillas se iluminarían gracias a las fuerzas electromotrices inducidas en el sistema al moverse el segmento CD .

1 Enunciado

Una varilla conductora de masa $m = 2.0 \text{ kg}$ se deja caer deslizando sin rozamiento por dos guías metálicas paralelas separadas una distancia $l = 5.0 \text{ m}$ contenidas en un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = 10^\circ$ con la horizontal. La dirección de la varilla es, en todo instante, perpendicular a las guías, las cuáles tienen conectados sus extremos mediante un cable de resistencia eléctrica $R = 10 \Omega$, que cierra el circuito. Las resistencias eléctricas de la varilla y las guías son despreciables. El sistema descrito se halla inmerso en un campo magnético uniforme y constante, \mathbf{B}_0 , de 0.5 T de intensidad, aplicado en dirección vertical y sentido contrario a la gravedad. Calcule:



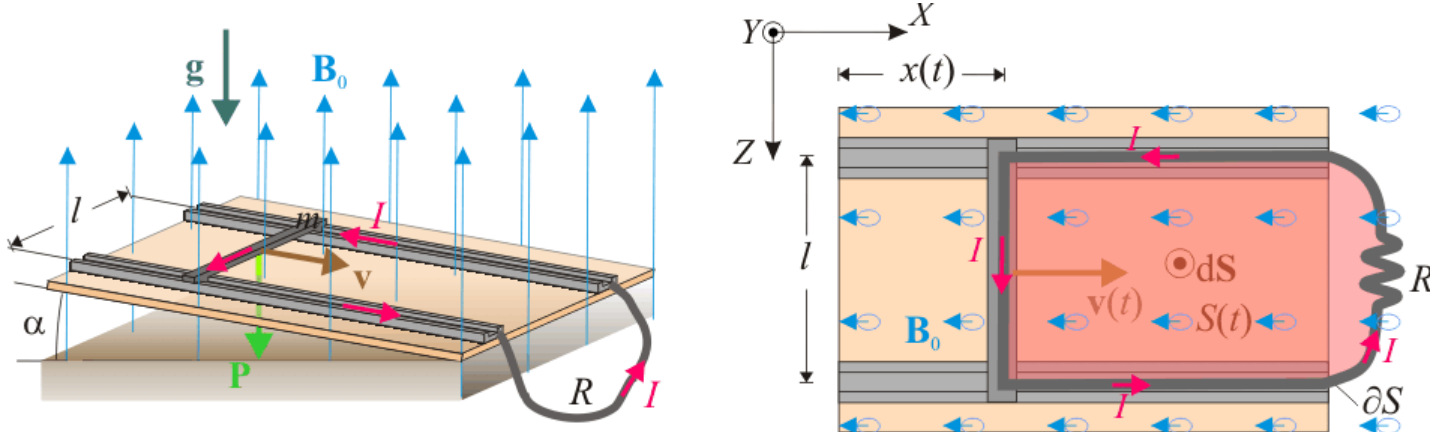
1. Corriente inducida en el circuito y velocidad límite que alcanzará la varilla.
2. Potencia disipada por efecto Joule en la resistencia. Compare esta potencia con el trabajo que por unidad de tiempo realiza la fuerza peso sobre la varilla.

2 Solución

Las dos guías paralelas conectadas por el cable y en contacto con la varilla móvil, constituyen un circuito cerrado ∂S por el que puede circular una corriente eléctrica, al tratarse de materiales conductores. Al poder desplazarse la varilla sobre las guías, se trata de un circuito variable en el que las resistencias eléctricas de estos elementos son despreciables frente a la $R = 10 \Omega$ del cable.

2.1 Intensidad de corriente y velocidad límite

Consideremos la superficie plana S delimitada por el circuito ∂S . La acción de la gravedad sobre la varilla pesada provoca el deslizamiento (sin rozamiento apreciable) de ésta sobre las guías inclinadas un ángulo α respecto de la horizontal y, por tanto, la variación del área de dicha superficie, $S = S(t)$. Esto se traducirá también en la variación del flujo a través de aquélla del campo magnético existente y, en virtud de la ley de inducción electromagnética, producirá una fuerza electromotriz inducida y una intensidad de corriente I en el circuito ∂S .



Adoptamos un sistema de referencia cartesiano cuyo eje X es paralelo a las guías, y con el eje Y perpendicular al plano inclinado que las soporta. La varilla móvil se mantendrá siempre paralela al eje X , y su desplazamiento estará descrito por una vector velocidad $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{i}$.

2.1.1 Flujo del campo magnético y fuerza electromotriz inducida en el circuito

En primer lugar, procederemos a discutir acerca del campo magnético existente en el entorno del circuito: por un lado, está el campo uniforme aplicado en la dirección de la vertical gravitatoria, y cuya descripción analítica en el sistema de referencia adoptado será:

$$\mathbf{B}_0 = B_0 (-\sin\alpha \mathbf{i} + \cos\alpha \mathbf{j}), \quad \text{con } B_0 = |\mathbf{B}_0| = 0.5 \text{ T}$$

Pero si el movimiento de la varilla tiene como consecuencia la aparición de una fuerza electromotriz y una corriente I inducidas, esta última será fuente de un campo magnético, que denominaremos \mathbf{B}_{ind} , y que también contribuirá al flujo magnético a través de la superficie delimitada por el circuito/espira ∂S . Nótese que este flujo del *campo inducido* va a ser proporcional a la intensidad de corriente I que lo genera, siendo la constante de proporcionalidad la **autoinducción** L de la espira que, por otra parte, será variable al cambiar la forma de la ésta:

$$\Phi_m \Big|_{S(t)} = \int_{S(t)} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{ind}}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S(t)} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} + L(t)I(t)$$

El valor de la autoinducción de la espira variable no es conocido, ni tampoco fácil de determinar. Sin embargo, esto no supone problema alguno pues la contribución al flujo magnético de la corriente inducida puede ser despreciada frente al flujo del campo uniforme, siempre que la intensidad de éste tenga un valor apreciable, como es el caso. Obsérvese que cuando la varilla empieza a moverse, la intensidad de corriente inducida es casi nula y, en general esto mismo ocurre con la autoinducción de la espira, de manera que el producto de ambas cantidades va a perfectamente despreciable frente al flujo de un campo magnético de medio tesla. Cuando la varilla aumente su velocidad, la intensidad de corriente inducida también irá aumentando, pero esto ocurre a costa de que el circuito/espira se vaya haciendo cada vez más pequeño y, por tanto, que disminuya el valor de la autoinducción. En consecuencia, la contribución al flujo del campo magnético inducido se mantendrá siempre en valores casi nulos:

$$\forall t, \quad L(t)I(t) \simeq 0 \quad \implies \quad \Phi_m \Big|_{S(t)} \simeq \int_{S(t)} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = B_0 \cos\alpha S(t)$$

donde los elementos de superficie en la $S(t)$ tiene la dirección y sentido del eje Y , $d\mathbf{S} = dS \mathbf{j}$. Por su parte, el área de la superficie plana delimitada por el circuito en un instante arbitrario t , tras iniciarse el movimiento de la varilla, será igual al valor inicial S_0 de dicha superficie menos el área del rectángulo barrido por la varilla en su movimiento durante dicho intervalo de tiempo; es decir,

$$S(t) = S_0 - lx(t) \quad \implies \quad \Phi_m(t) \Big|_{S(t)} = B_0 \cos\alpha [S_0 - lx(t)]$$

siendo $x(t)$ la distancia recorrida por la varilla en un tiempo t , desde su posición inicial.

2.1.2 Fuerza electromotriz inducida y expresión de la intensidad de corriente

La ecuación del circuito ∂S establece que la suma de todas las fuerzas electromotrices (de generadores y/o inducidas) presentes en la espira, serán iguales a las caídas de tensión de las diferentes resistencias en serie existentes en el circuito.

$$\sum_i \mathcal{E}_{\text{gen}}^i + \mathcal{E}_{\text{ind}} = \sum_j R_j I_j$$

En este caso, la única fuerza electromotriz es la inducida debido a la variación instantánea del flujo magnético a través del circuito/espira:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{S(t)} = l B_0 \cos\alpha \frac{dx(t)}{dt} = l B_0 \cos\alpha v(t)$$

ya que la celeridad instantánea con que la se desplaza a lo largo del eje X es... $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

La intensidad de corriente será la misma $I(t)$ inducida en todos los puntos del circuito, y la única resistencia apreciable es la R del cable. Se tendrá, por tanto:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = RI(t) \quad \implies \quad I(t) = \frac{l B_0 \cos\alpha}{R} v(t)$$

Es decir, en cada instante de tiempo la intensidad de la corriente que recorre el circuito es proporcional a la velocidad de la varilla, donde la constante de proporcionalidad está determinada por la intensidad y dirección del campo magnético, la separación de las guías y la resistencia eléctrica del cable. Por otra parte, siempre que la varilla descienda por el plano inclinado, moviéndose en el establecido como sentido

positivo del eje X , la intensidad de corriente también va a ser positiva; es decir, que la corriente eléctrica inducida recorrerá el circuito/espira ∂S en el sentido antihorario, que es el sentido positivo congruente con la elección que hemos hecho de los $d\mathbf{S}$.

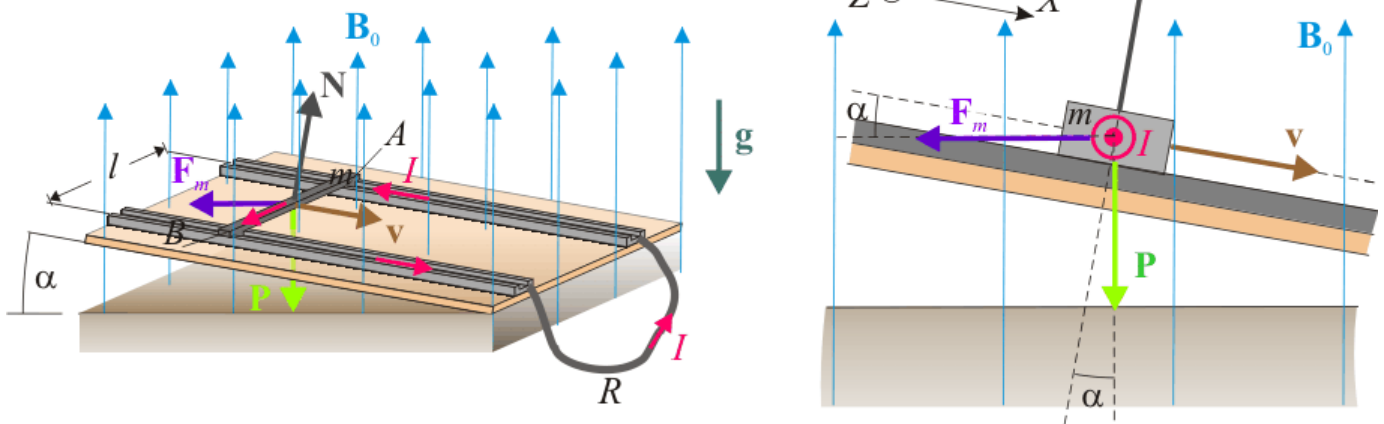
Obsérvese también cómo se verifica la ley de Lenz: el movimiento de la varilla provoca una disminución del área delimitada por el circuito y una disminución también del flujo magnético ya que, con la elección de los $d\mathbf{S}$, dicho flujo es positivo. La corriente inducida tiene sentido positivo, de manera que creará un campo magnético en el sentido de los $d\mathbf{S}$, que contribuirá al aumento del flujo magnético oponiéndose, por tanto, al efecto del movimiento de la varilla sobre dicha magnitud.

2.1.3 Velocidad límite de la varilla e intensidad máxima en el circuito

Para completar el análisis del sistema debemos determinar cómo es la ley $v(t)$ que describe la evolución de la velocidad de la varilla o, al menos, obtener la ecuación diferencial que gobierna dicha evolución. Para ello aplicamos, la segunda ley de Newton: la resultante de las fuerzas que actúan sobre la varilla es igual al producto de la masa por la aceleración del centro de masas de la varilla. Las fuerzas que actúan sobre ésta son: la fuerza peso \mathbf{P} , o acción de la gravedad, la fuerza de reacción normal \mathbf{N} , que impide cualquier movimiento de la varilla que no sea el deslizamiento sobre las guías, y la fuerza magnética \mathbf{F}_m que ejerce el campo magnético \mathbf{B}_0 sobre la corriente eléctrica inducida $I(t)$, entre los extremos A y B de la varilla:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = mg(\sin\alpha\mathbf{i} - \cos\alpha\mathbf{j}); \quad \mathbf{N} = N\mathbf{j} \quad (N \geq 0)$$

$$\mathbf{F}_m = \int_A^B I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}_0 = I(t) \overrightarrow{AB} \times \mathbf{B}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}_m = -\frac{l^2 B_0^2 \cos\alpha}{R} v(t) [\cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}]$$



Como la varilla no puede girar debido al contacto con las guías, la aceleración del centro de masas es la misma que la de cualquiera de sus puntos y , por tanto, será igual a la variación por unidad de tiempo de la velocidad instantánea de la varilla, $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{i}$. Se obtienen, entonces las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_m = m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m \frac{dv(t)}{dt} \mathbf{i} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} mg \sin\alpha - \frac{l^2 B_0^2 \cos^2\alpha}{R} v(t) = m \frac{dv(t)}{dt} & (1) \\ -mg \cos\alpha + N - \frac{l^2 B_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{R} v(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

La ecuación (2) sólo permite determinar el valor de la fuerza de reacción vincular equivalente a la acción de las dos guías sobre la varilla, mientras que (1) es la ecuación característica de la evolución de la velocidad de la varilla. La [solución de esta ecuación diferencial](#) nos proporciona una descripción instantánea del movimiento de la varilla, a partir de la cual, se podrá determinar la evolución temporal de la intensidad de corriente inducida en el circuito variable bajo estudio.

Sin embargo, en el enunciado sólo se piden los valores máximos que van a alcanzar dichas magnitudes físicas, los cuales pueden obtenerse a partir de la ecuación diferencial (1), aunque sin necesidad de resolverla explícitamente. Veamos: en el instante inicial, en el cual suponemos que la varilla está en

reposito, no hay fuerza magnética actuando sobre ésta, por lo que la aceleración inicial es debida exclusivamente a la componente de la dirección X de la fuerza peso (que se mantiene constante en todo instante):

$$v(t=0) = 0 \implies \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = a(t=0) = g \operatorname{sen} \alpha$$

De esta forma, la velocidad de la varilla comienza a crecer, pero esto hace que aumente la intensidad de corriente en el circuito y, en consecuencia, la fuerza magnética sobre la varilla que, como hemos visto, es proporcional a la velocidad y tiende a frenar el movimiento de la varilla en el sentido positivo del eje X . Es decir, la aceleración de la varilla será cada vez menor cuanto mayor es su velocidad hasta que, e incluso aquella tiende a anularse conforme la velocidad se aproxima a cierto valor crítico v_l que depende de los parámetros geométricos y eléctricos del sistema, así como del campo magnético externo aplicado:

$$v_l = \frac{mgR \operatorname{sen} \alpha}{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha} \implies \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{v \rightarrow v_l} \rightarrow 0$$

Obsérvese que esto ocurre según la fuerza magnética sobre la varilla va creciendo paulatinamente y tiende a compensar o anular la componente X de la fuerza peso. Y cuando la aceleración de la varilla tiende a anularse, la velocidad de la varilla y, por tanto, la intensidad y la fuerza magnética tenderán a estabilizarse en valores constantes que dan lugar a una situación de equilibrio dinámico en que la resultante de todas las fuerzas es el vector nulo, de manera que la varilla realiza un movimiento rectilíneo uniforme. Se tendrá, por tanto, que el valor crítico de velocidad antes determinado será el límite máximo para la velocidad de la varilla, el cuál se corresponderá con un valor máximo de intensidad de corriente en el circuito:

$$v_{\max} = v_l = \frac{mgR \operatorname{sen} \alpha}{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha} \simeq 5.6 \text{ m/s} \implies I_{\max} = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{l B_0 \cos \alpha} = \frac{mg}{l B_0} \tan \alpha \simeq 1.4 \text{ A}$$

Nótese que el valor de intensidad máxima es el que da lugar a una fuerza magnética sobre la varilla que anula el efecto de la componente tangencial de la gravedad sobre ella.

2.2 Estudio energético en el estadio estacionario

Realizaremos un estudio de los aspectos energéticos del sistema cuando alcanza el estadio estacionario o de equilibrio dinámico; es decir, cuando la velocidad de la varilla y las intensidad de corriente han alcanzado su valores máximos y la varilla se desliza con movimiento rectilíneo uniforme:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_{\text{est}} = v_{\max} \mathbf{i} \\ I_{\text{est}} = I_{\max} \end{array} \right\} \iff [\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_m]_{\text{est}} = \mathbf{0}$$

En esta situación de movimiento rectilíneo, el trabajo elemental realizado por cada una de las fuerzas aplicadas es igual al producto escalar de la fuerza por un desplazamiento infinitesimal de la varilla, $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt = dx \mathbf{i}$. Y si se multiplica la anterior ecuación vectorial por un desplazamiento elemental, se tendrá:

$$\left. \begin{array}{l} \delta W_g = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = -dU_g \\ \delta W_{\text{vinc}} = \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0 \\ \delta W_m = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} \end{array} \right\} \iff [-dU_g + \delta W_m]_{\text{est}} = 0$$

Es decir, el teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética permite establecer a priori que, cuando el sistema alcanza el estado estacionario en el cual la varilla se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, el trabajo elemental realizado en cada instante por la fuerza magnética que actúa sobre la varilla, es igual a la variación de energía potencial gravitatoria de ésta.

Podemos comprobarlo evaluando las cantidades de trabajo que por unidad de tiempo realizan la fuerza peso y la magnética cuando actúan sobre la varilla. La potencia instantánea desarrollada por la fuerza magnética es:

$$\left. \frac{dW_m}{dt} \right|_{\text{est}} = \mathbf{F}_m(I_{\text{est}}) \cdot \mathbf{v}_{\text{est}} = -\frac{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha}{R} v_{\max}^2 = -\frac{m^2 g^2 R \operatorname{sen}^2 \alpha}{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha} < 0$$

donde el signo negativo indica que dicha fuerza realiza un trabajo de “frenado de la varilla”; es decir, actúa como una fuerza disipativa que se opone a su desplazamiento. La potencia desarrollada por la fuerza peso es, en cada instante a la variación por unidad de tiempo de la energía potencial gravitatoria de la varilla:

$$-\left. \frac{dU_g}{dt} \right|_{\text{est}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_{\text{est}} = mg \operatorname{sen} \alpha v_{\text{max}} = \frac{m^2 g^2 R \operatorname{sen}^2 \alpha}{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha} > 0$$

Y efectivamente, tal como adelantaba el teorema de las fuerzas vivas, comprobamos que...

$$\left. \frac{dW_m}{dt} \right|_{\text{est}} = \left. \frac{dU_g}{dt} \right|_{\text{est}}$$

Es decir, la disminución de energía potencial gravitatoria no se traduce en un aumento de la energía cinética de la varilla (en el estacionario la velocidad es constante), sino que aquélla es eliminada por el trabajo negativo que realiza la fuerza magnética que, como ya hemos dicho, se comporta como una fuerza disipativa. Pero, ¿de qué forma se disipa?. ¿Qué mecanismo sirve a la fuerza magnética para eliminar la energía potencial de la varilla manteniendo constante su energía cinética?

2.2.1 Potencia disipada por efecto Joule

Calculamos la potencia disipada en el circuito en forma de calor, a causa del efecto Joule, cuando el sistema ha alcanzado el estado estacionario:

$$P_{\text{Jou}} \Big|_{\text{est}} = RI_{\text{max}}^2 = \frac{m^2 g^2 R \operatorname{sen}^2 \alpha}{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha} = \left. \frac{dW_m}{dt} \right|_{\text{est}} = \left. \frac{dU_g}{dt} \right|_{\text{est}} \simeq 19.6 \text{ w}$$

Es decir, toda la energía potencial gravitatoria que pierde la varilla en su descenso con velocidad máxima y constante, se transforma en calor en virtud del efecto Joule asociado a la corriente eléctrica inducida en el circuito a causa, precisamente, del movimiento de la varilla.

3 Anexo: solución instantánea

La evolución en el tiempo de la *celeridad* de la varilla a partir del instante $t = 0$ en que se inicia su movimiento, está gobernada por la ecuación diferencial (1) del [apartado 2.1.3](#), que podemos reformular de la siguiente forma:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \lambda v(t) = g \operatorname{sen} \alpha; \quad \text{con } \lambda = \frac{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha}{mR}$$

Es decir se trata de una ecuación diferencial inhomogénea de primer orden en la variable tiempo para la magnitud física $v(t)$, donde el factor λ y el segundo miembro de la ecuación son valores constantes que dependen de los valores de los distintos parámetros (geometría, campo magnético externo, resistencia eléctrica), que intervienen en el sistema.

La solución de esta ecuación diferencial será la ley horaria que sigue la celeridad $v(t)$ en el sistema bajo estudio. Dicha solución es igual a la suma de una solución particular $v_I(t)$ de la ecuación, más la solución general de la ecuación diferencial homogénea, $v_H(t)$.

Una solución particular de la ecuación diferencial es muy fácil de determinar ya que, como el segundo miembro de la ecuación no es función de la variable tiempo, habrá un valor de celeridad constante que verificará dicha ecuación:

$$v_I(t) = v_I, \text{ cte.} \quad \iff \quad \underbrace{\frac{dv_I}{dt}}_{=0} + \lambda v_I = g \operatorname{sen} \alpha$$

Obsérvese que esta solución particular es igual al valor crítico de velocidad que, mediante argumentos cualitativos, dedujimos en el [apartado 2.1.3](#) como valor máximo posible para la velocidad de la varilla:

$$v_I = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{\lambda} = \frac{mgR \operatorname{sen} \alpha}{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha} = v_l$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea es la familia de funciones del tiempo que verifiquen la ecuación:

$$\frac{dv_H(t)}{dt} + \lambda v_H(t) = 0$$

la cuál se puede integrar fácilmente por separación de variables:

$$\int \frac{dv_H}{v_H} = -\lambda \int dt \quad \longrightarrow \quad \ln v_H = -\lambda t + \ln C \quad \longrightarrow \quad v_H(t) = C e^{-\lambda t}$$

donde C es una constante de integración. La solución general de la ecuación diferencial planteada es:

$$v(t) = v_l + C e^{-\lambda t}$$

Y para que sea la ley horaria de la velocidad de la varilla en el sistema bajo estudio, esta solución deberá verificar las condiciones iniciales impuestas en dicho sistema, lo cuál fijará el valor de la constante C . Asumiendo que la varilla se encontraba en reposo cuando en el instante $t = 0$ comienza a deslizar sobre las guías, se tendrá que:

$$v(t=0) = v_l + C = 0 \quad \implies \quad C = -v_l \quad \implies \quad v(t) = v_l (1 - e^{-\lambda t})$$

Es decir, la varilla parte del reposo y aumenta su velocidad de manera exponencial hasta el valor v_l , que alcanzará al cabo de un tiempo infinito, tratándose por tanto de un límite máximo para dicha magnitud:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_l \quad \implies \quad \forall t \quad v(t) < v_l = v_{\max}$$

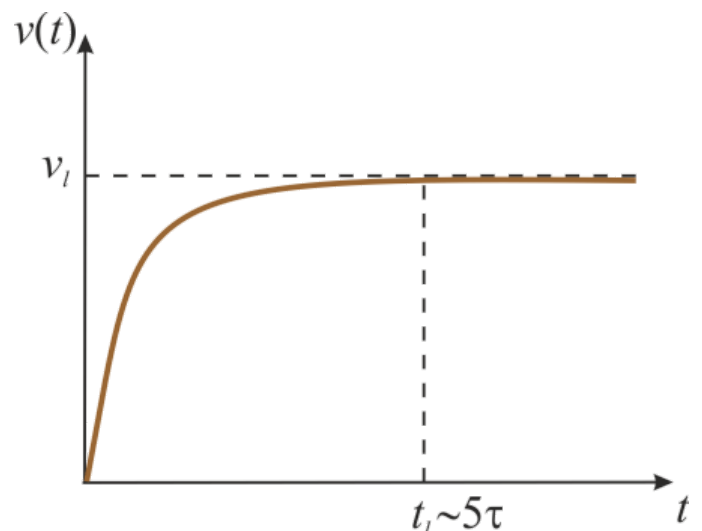
Obsérvese que este resultado parece no coincidir con el análisis cualitativo que se llevo a cabo en el [apartado 2.1.3](#) para determinar dicha velocidad límite, donde se daba a entender que el sistema alcanzaría el estado de estacionario (varilla con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado) al cabo de un cierto intervalo (finito) tiempo. Podría argumentarse que la ecuación diferencial que hemos resuelto constituye un modelo ideal del sistema, en el cuál se están despreciando ciertos parámetros como la autoinducción del circuito variable, o la resistencia eléctrica de las guías y la varilla. Sin embargo, podemos comprobar que la ley horaria $v(t)$ obtenida con este modelo ideal, proporciona una descripción bastante precisa del comportamiento de la varilla. Podemos definir un "tiempo característico" τ del sistema (llamado *constante de tiempo* o *tiempo de relajación*),

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{mR}{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha} \simeq 3.3 \text{ s}$$

tal que para instantes del orden de una pocas veces τ , la varilla tendrá un velocidad muy próxima su valor límites. Por ejemplo, cuando el tiempo transcurrido desde el inicio del movimiento es cinco veces el valor de la constante de tiempo, la velocidad de la varilla casi habrá alcanzado el valor límite, con un error inferior al 1 %:

$$v(5\tau) = v_l (1 - e^{-5}) \simeq 0.993 v_l$$

Para instantes posteriores, la velocidad de la varilla estará a aún más próxima al valor v_l .



Por otra parte, en el [apartado 2.1.2](#) se determinó que la intensidad de corriente inducida en el circuito/espira ∂S , debido al movimiento de la varilla, va a ser en todo instante proporcional a la velocidad de la ésta. Por tanto, esta magnitud eléctrica presenta un comportamiento en el tiempo completamente similar a la $v(t)$:

$$I(t) = I_l (1 - e^{-\lambda t}), \quad \text{con} \quad I_l = \frac{lB_0 \cos \alpha}{R} v_l = \frac{mg}{lB_0} \tan \alpha = I_{\max}$$

1 Enunciado

Se tienen dos bobinas o solenoides, ambas de igual longitud h , pero de distinta sección: la bobina "1" tiene forma de cilindro recto, estando formada por N_1 espiras circulares de radio a . Por su parte, la bobina "2" tiene forma de prisma recto de sección cuadrada y la constituyen N_2 espiras cuadradas iguales, cuya diagonal mide $2a$. En ambas bobinas los hilos conductores están enrollados en el mismo sentido, y de manera que las espiras se distribuyen de forma compacta en planos perpendiculares a su correspondiente eje. Asumiendo que se verifica la condición de bobinas largas ($h \gg 2a$), ¿cuáles son los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua del sistema cuando la bobina "2" se coloca por completo en el interior de la "1"?

2 Solución

En un sistema formado por varias espiras o circuitos cerrados donde circulan sendas corrientes eléctricas estacionarias, los diferentes flujos magnéticos de los campos generados por dichas corrientes, a través de las superficies definidas por las espiras, puede expresarse como una combinación lineal de las intensidades de corriente. El sistema bajo estudio está formado por dos bobinas que constituyen sendos circuitos $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$, que cuando son recorridos por corrientes de intensidad I_1 e I_2 , respectivamente, generarán campos magnéticos tales que los flujos del campo magnético total a través de aquéllas verificarán las relaciones,

$$\Phi_m]_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

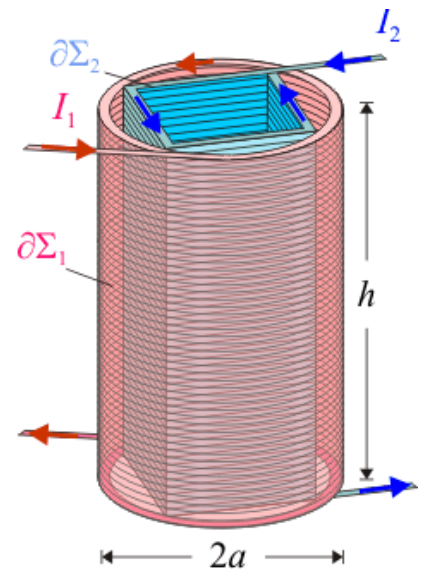
$$\Phi_m]_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2 = M I_1 + L_2 I_2$$

donde L_1 y L_2 son los coeficientes de autoinducción de las bobinas, y M el de inducción mutua. Y puesto que estos coeficientes están directamente relacionados con los flujos magnéticos a través de superficies Σ_1 y Σ_2 delimitadas por los circuitos $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$, van a depender tanto de su forma y geometría como de su disposición relativa.

Nótese que como las bobinas son circuitos formados por N_1 y N_2 espiras planas y paralelas (circulares y cuadradas, respectivamente) las superficies Σ_1 y Σ_2 se pueden descomponer en N_1 círculos idénticos de radio a , y N_2 cuadrados iguales de lado $\sqrt{2}a$, todos contenidos en planos paralelos, que consideraremos perpendiculares a la dirección OZ . Sean S_1 y S_2 las superficies planas delimitadas por sendos representantes $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$ de las espiras que conforman las bobinas; los flujos magnéticos a través de éstas son:

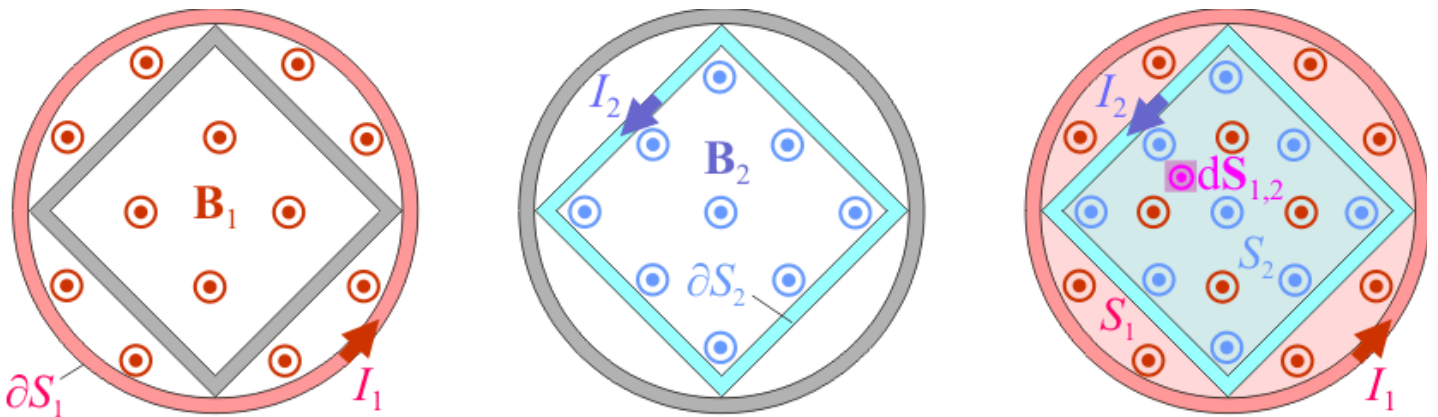
$$\Phi_m]_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_1 = N_1 \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_1$$

$$\Phi_m]_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2 = N_2 \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2$$



con $d\mathbf{S}_{1,2} = dS \mathbf{k}$. En una situación general en que las bobinas son recorridas por sendas corrientes de intensidades I_1 e I_2 , el campo total que fluye a través de ellas es igual a la suma vectorial de los campos magnéticos creado por cada una de las corrientes. En el enunciado se indica que la longitud de las bobinas es mucho mayor que la de su diámetro y diagonal; en consecuencia, es aplicable la aproximación de bobina larga: el campo magnético creado por la corriente en cada bobina es prácticamente nulo en todos los puntos del exterior y constante en los del interior, y además, independiente de la forma que tenga la sección de la bobina. Por tanto, en los puntos del plano que contiene a las espiras S_1 y S_2 , se tendrá:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 \frac{N_1}{h} I_1 \mathbf{k}; & \text{si } P \in S_1 \\ \mathbf{0}; & \text{si } P \notin S_1 \end{cases} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{cases} \mu_0 \frac{N_2}{h} I_2 \mathbf{k}; & \text{si } P \in S_2 \\ \mathbf{0}; & \text{si } P \notin S_2 \end{cases}$$



Y como los puntos de la superficie S_2 , delimitada por la espira cuadrada constituyen un subconjunto del círculo S_1 delimitado por la circular (es decir, $S_2 \subset S_1$), se tendrá:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \begin{cases} \frac{\mu_0}{h} (N_1 I_1 + N_2 I_2) \mathbf{k}; & \text{si } P \in S_2 \\ \frac{\mu_0}{h} N_1 I_1 \mathbf{k}; & \text{si } P \in S_1 - S_2 \\ \mathbf{0}; & \text{si } P \notin S_1 \end{cases}$$

Por tanto, la expresiones de los flujos magnéticos a través de las bobinas, en función de sus propiedades geométricas son...

$$\Phi_m]_{\Sigma_1} = N_1 \frac{\mu_0}{h} \left[N_1 I_1 \int_{S_1} dS_1 + N_2 I_2 \int_{S_2} dS_2 \right] = \frac{\mu_0}{h} (\pi a^2 N_1^2 I_1 + 2 a^2 N_1 N_2 I_2)$$

$$\Phi_m]_{\Sigma_2} = N_2 \frac{\mu_0}{h} (N_1 I_1 + N_2 I_2) \int_{S_2} dS_2 = \frac{\mu_0}{h} 2 a^2 (N_1 N_2 I_1 + N_2^2 I_2)$$

E identificando en cada una de las expresiones los factores que multiplican a las intensidades de las corrientes en cada bobina, se obtienen los coeficientes de autoinducción e inducción mutua del sistema:

$$L_1 = \mu_0 N_1^2 \frac{\pi a^2}{h}; \quad M = \mu_0 N_1 N_2 \frac{2a^2}{h}; \quad L_2 = \mu_0 N_2^2 \frac{2a^2}{h}$$

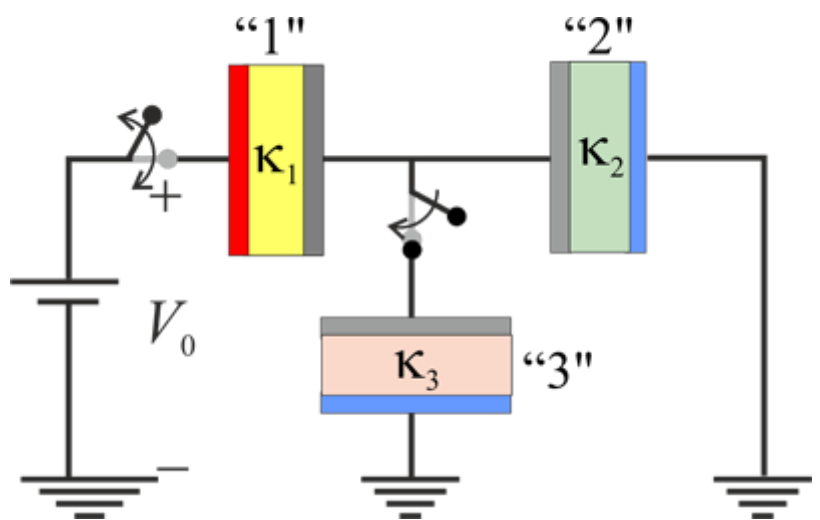
1 Enunciado

Se tienen tres condensadores de idéntica geometría, "1", "2" y "3", cuya capacidad eléctrica sería C_0 si no hubiese ningún medio material dieléctrico separando los conductores. Sin embargo, están rellenos de sendos dieléctricos de constantes dieléctricas κ_1 , κ_2 y κ_3 , respectivamente. Inicialmente se encuentran los tres descargados y los dos primeros están conectados en serie, con el conductor libre de "2" conectado al conductor de referencia o *tierra*. Un generador electrostático de f.e.m. V_0 , tiene su electrodo negativo conectado también al conductor de referencia. Se procede a conectar el electrodo positivo al conductor libre del condensador "1" para cargar la asociación en serie. Una vez realizado este paso, se desconecta el generador. Posteriormente, se conecta el conductor *flotante* de la asociación en serie formada por "1" y "2" a un conductor del condensador "3", que tiene el otro conductor conectado a "tierra".

1. ¿Qué cantidad de carga eléctrica hay en cada uno de los conductores de "1" y "2" tras cargar la asociación en serie de estos dos condensadores? ¿Cuál es el valor del potencial en el conductor *flotante*?

2. ¿Qué valores de carga y potencial habrá en los conductores de cada condensador al conectar el condensador "3" al sistema, tal como se describe en el enunciado? ¿Cómo ha cambiado la cantidad de energía almacenada al conectar dicho condensador?

3. Sean ΔV_1^{\max} , ΔV_2^{\max} y ΔV_3^{\max} los valores de las diferencias de potencial máximas que pueden aplicarse a los respectivos condensadores "1", "2" y "3" para que no se produzca la ruptura dieléctrica en cada uno de ellos. Obtenga las expresiones que permitan determinar cuál debe ser el valor máximo que puede tener V_0 , en función de estos valores y de las constantes dieléctricas, para que en ningún momento del proceso descrito se produzca una ruptura dieléctrica en el sistema. Considere el caso particular en que $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$ y $\Delta V_1^{\max} < \Delta V_2^{\max} < \Delta V_3^{\max}$: ¿cuál debe ser el valor máximo de V_0 ?



2 Solución

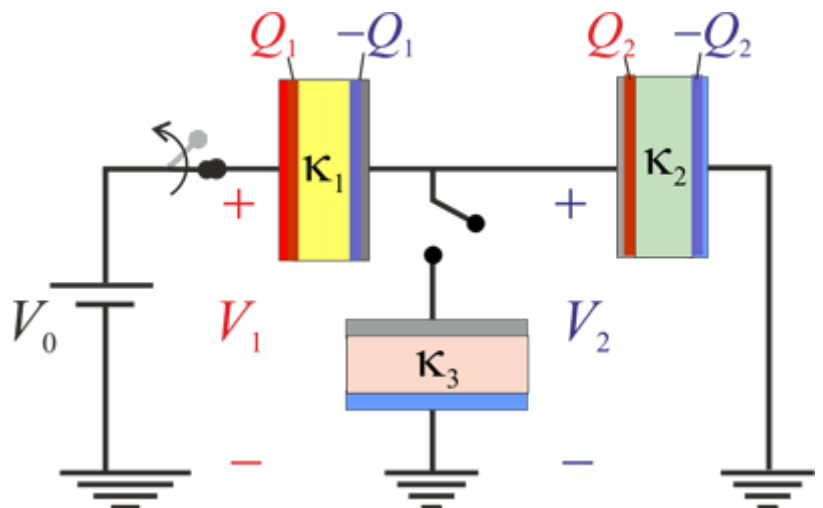
Los valores C_i de Las capacidad de los tres condensadores verifican

$$C_0 = \frac{C_1}{\kappa_1} = \frac{C_2}{\kappa_2} = \frac{C_3}{\kappa_3}$$

Inicialmente, antes de realizar ninguna conexión, el sistema está completamente descargado; es decir, ambos conductores de los tres condensadores tienen carga nula y se encuentran a potencial cero.

2.1 Cargas eléctricas y potencial en la asociación en serie

Los condensadores "1" y "2" están conectados en serie, mientras que "3" se mantiene desconectado del sistema. En un determinado instante, se procede a conectar el electrodo *accesible* del condensador "1" al generador electrostático con f.e.m. de valor V_0 . Dicho electrodo (conductor) va a constituir una superficie equipotencial de valor V_1 , y se cargará con una cierta cantidad de carga Q_1 , suministrada por el generador; el otro electrodo del condensador "1" adquiere una cantidad de carga opuesta, por estar ambos en influencia total. Este segundo electrodo presentará un valor de potencial V_2 , que será el mismo que el electrodo del condensador "2", al cuál está aquél conectado, dando lugar a la asociación en serie. Y como el otro electrodo del condensador "2" está conectado a tierra y por tanto, el valor del potencial en dicho conductor es nulo, la diferencia de potencial entre dichos electrodos provoca la aparición de cargas eléctricas, naturalmente opuestas $\pm Q_2$ en ambos conductores del condensador "2". Nótese que la carga $-Q_2$ en el electrodo conectado a tierra sería suministrada por dicho *conductor de referencia*. Por otra parte, nótese que en la asociación en serie de ambos condensadores, los electrodos de uno y otro que son interconectados constituyen un *conductor flotante*; es decir, es conductor aislado en el que la carga Q_f que almacenada permanece constante: y si inicialmente estaba descargado, en todo momento permanecerá con carga total nula, independientemente de cómo se distribuya. En consecuencia,



$$-Q_1 + Q_2 = Q_f = 0 \implies Q_1 = Q = Q_2$$

Por otra parte, la capacidad C_{12} de la asociación en serie de los condensadores 1 y 2, será

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{V_1}{Q},$$

pues la diferencia de potencial entre los conductores accesibles de la asociación es V_1 , al estar el otro a potencial nulo (conectado a *tierra*). Y puesto que el conductor accesible del condensador "1" está directamente conectado al electrodo positivo del generador mientras que el negativo está a *tierra*, se tendrá:

$$V_1 = V_0; \implies Q_1 = Q_2 = Q = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} C_0 V_0$$

El valor del potencial en el conductor flotante, V_f , es inmediato:

$$C_2 = \kappa_2 C_0 = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{Q}{V_2} \implies V_f = V_2 = \frac{Q}{\kappa_2 C_0} = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} V_0$$

Si tras cargarse la asociación en serie se desconecta el generador, en los conductores permanecen las mismas cantidades de carga que se establecieron tras la conexión. Y tampoco lo harán los valores de los potenciales V_1 y V_2 , mientras no se mantengan las capacidades eléctricas del sistema; es decir, mientras no se cambie la geometría de los condensadores y/o sus conexiones. La energía electrostática almacenada en el sistema es

$$U_e = \frac{1}{2} [Q_1(V_1 - V_2) + Q_2 V_2] = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{12}} \implies U_e = \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} C_0 V_0^2$$

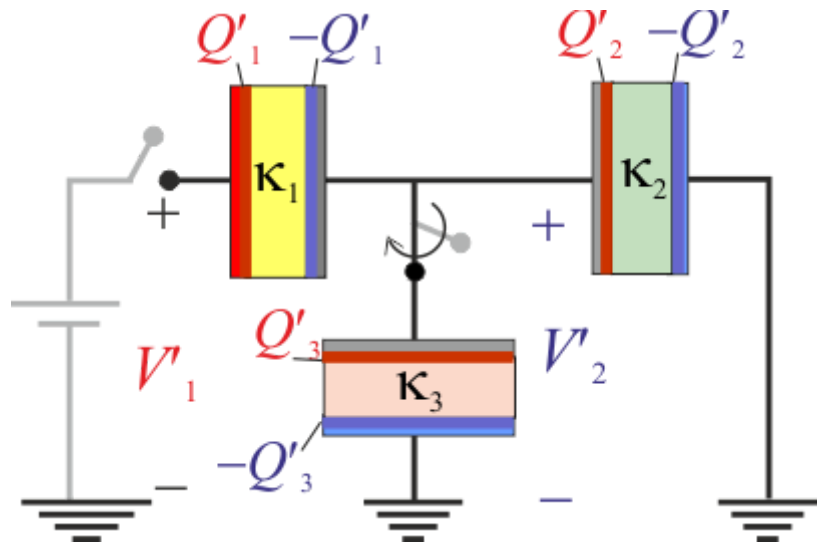
2.2 Cargas eléctricas y potenciales tras conectar el tercer condensador

Cuando el condensador "3" se conecta a la asociación en serie previamente cargada y desconectada del generador, aquél pasa de estar descargado a tener cargas $\pm Q'_3$; pero también han cambiado las capacidades eléctricas del sistema previo, por lo que también cambiarán las cargas y potenciales, en los conductores de los condensadores "1" y "2" que, en general, tendrán valores $\pm Q'_1$, $\pm Q'_2$, V'_1 y V'_2 . Obsérvese que éste va a ser también el potencial en el electrodo del condensador "3" que se conecta al *conductor flotante* la previa asociación en serie. Y como el condensador "3" estaba inicialmente descargado, la conexión de los tres conductores (uno de cada condensador) seguirá constituyendo un conductor aislado y descargado; es decir, sigue siendo un conductor *flotante*. Por tanto,

$$-Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 = Q_f = 0$$

Por otra parte, el conductor libre del condensador "1" (el que se conecto y desconectó luego del generador), se encuentra aislado, es decir, no puede cambiar la cantidad de carga que soporta, que seguirá siendo la que adquirió al conectar el generador. Y en el otro conductor se mantendrá la carga opuesta, al ser "1" un condensador que,

necesariamente ha de cumplir la condición de conductores en influencia total. En consecuencia, se tendrá:



$$Q'_1 = Q = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} C_0 V_0 \quad \text{y} \quad Q'_2 + Q'_3 = Q'_1 = Q$$

Si tenemos en cuenta que "2" y "3" forman una **asociación en paralelo**, su capacidad C_{23} , es ...

$$C_{23} = C_2 + C_3 = C_0 (\kappa_2 + \kappa_3) = \frac{Q'_2 + Q'_3}{V'_2} \implies$$

$$V'_1 = V'_2 = \frac{Q}{C_0 (\kappa_2 + \kappa_3)} = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)} V_0$$

... y las cargas en los conductores "2" y "3"...

$$Q'_2 = \kappa_2 C_0 V'_2 = \frac{\kappa_1 \kappa_2^2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)} C_0 V_0$$

$$Q'_3 = \kappa_3 C_0 V'_2 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)} C_0 V_0$$

Finalmente, la diferencia de potencial entre los conductores del condensador "1" está determinada por la cantidad de carga eléctrica que separa y su capacidad:

$$V'_1 - V'_2 = \frac{Q'_1}{\kappa_1 C_0} \implies V'_1 = V'_2 + \frac{Q}{\kappa_1 C_0} = \frac{\kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)} V_0$$

La energía electrostática almacenada en el sistema en este caso es:

$$U_e = \frac{1}{2} \left[Q'_1(V'_1 - V'_2) + (Q'_2 + Q'_3)V'_2 \right], \dots$$

... o también, expresada en términos de la capacidad C_{eq} de la asociación en serie del condensador "1" con la asociación en paralelo de los condensadores "2" y "3".

$$U'_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{eq}}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1 C_0} + \frac{1}{(\kappa_2 + \kappa_3) C_0}$$

Luego, la variación sufrida por la energía almacenada en el sistema al conecta el tercer condensador en el sistema aislado previo, es:

$$\Delta U_e = U'_e - U_e = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_{eq}} - \frac{1}{C_{12}} \right)$$

Se tendrá, por tanto,

$$\frac{1}{C_{eq}} - \frac{1}{C_{12}} = -\frac{1}{C_0} \frac{\kappa_3}{\kappa_2(\kappa_2 + \kappa_3)} \quad \Rightarrow \quad \Delta U_e = -\frac{1}{2} \frac{\kappa_1^2 \kappa_2 \kappa_3}{(\kappa_1 + \kappa_2)^2 (\kappa_2 + \kappa_3)} C_0 V_0^2$$

2.3 Valor máximo de la f.e.m . del generador para evitar la ruptura dieléctrica en los condesadores

Para que no se produzca dicho fenómeno, es necesario que la diferencia de potencial en cada condensador, en cada una de las dos situaciones consideradas, sea menor que el límite máximo correspondiente.

En el primer condensador, la diferencia de potencial entre sus electrodos es la misma en las dos configuraciones consideraras; por tanto, para que no se produzca la ruptura dieléctrica en dicho condensador se deberá cumplir:

$$V_1 - V_2 = V'_1 - V'_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} V_0 < \Delta V_1^{\max}$$

El valor del potencial en el conductor flotante verifica la relación...

$$V'_f = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)} V_0 < \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} V_0 = V_f$$

Por tanto, la diferencia de potencial en el condensador "2" alcanza el mayor valor en la configuración de asociación en serie con "1":

$$V_2' < V_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} V_0 < \Delta V_2^{\max}$$

En el caso del condensador "3", éste sólo interviene en la configuración final del sistema, por tanto, debe cumplirse:

$$V_f' = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)} V_0 < \Delta V_3^{\max}$$

Si se tienen en cuenta las relaciones entre los valores de las constantes dieléctricas y entre los valores de potencial máximo en cada uno de los condensadores....

$$\frac{\kappa_1 \kappa_2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 + \kappa_3)} V_0 < \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} V_0 < \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} V_0 < \Delta V_1^{\max} < \Delta V_2^{\max} < \Delta V_3^{\max},$$

luego, la condición crítica en el valor V_0 de la f.e.m. del generador para que no se produzca la ruptura dieléctrica en el sistema es:

$$V_0 < \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} \Delta V_1^{\max}$$

1 Enunciado

Se tienen dos discos conductores idénticos, de radio $a = 6 \text{ cm}$, con los que se quiere construir un condensador plano-paralelo de capacidad eléctrica $C_0 \approx 100 \text{ pF}$

1. Si los conductores están separados por aire, cuyo campo de ruptura es $E_{\text{air}} = 3 \text{ kV/mm}$, ¿qué distancia debe existir entre los discos conductores? ¿Cuál es el máximo valor de diferencia de potencial que puede aplicarse entre los discos?
2. Si se separan por una lámina de papel de espesor $\delta = 0,1 \text{ mm}$, cuya constante de dieléctrica es $\kappa \approx 4$, y cuyo campo de ruptura es $E_{\text{pap}} = 12 \text{ kV/mm}$, ¿cuál será la capacidad eléctrica y la diferencia de potencial que puede aplicarse?

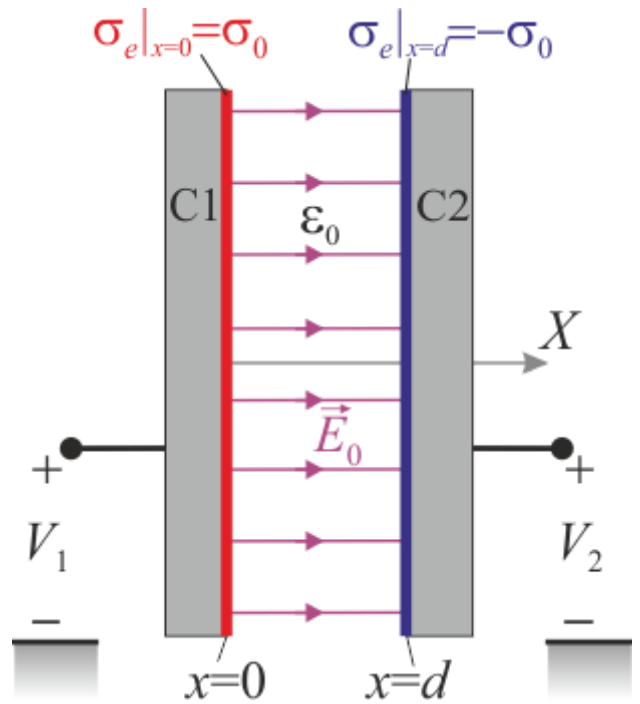
2 Introducción

El condensador plano-paralelo

Un condensador plano paralelo es un sistema formado por dos superficies conductoras planas iguales, enfrentadas y dispuestas en sendos planos paralelos, separadas por un medio dieléctrico. Además, ambas superficies conductoras se están **en influencia total**: soportan cantidades opuestas de carga eléctrica y, por tanto, todas las líneas del campo eléctrico que “salen” del plano con carga positiva $+Q$, “terminan” en el plano con la carga negativa $-Q$.

Adoptaremos un sistema de referencia tal que los planos conductores enfrentados y cargados, coincidan con los planos geométricos $\Pi_1 : x = 0$ y $\Pi_2 : x = d$, ambos perpendiculares al eje OX . Además, consideraremos que el dieléctrico que separa ambos planos es el vacío, cuya permitividad dieléctrica en el Sistema Internacional de unidades es $\epsilon_0 = (1/36\pi) \text{ nF/m}$.

En un condensador real con conductores de tamaño finito y planos en influencia total de área S , las cargas eléctricas se distribuyen más o menos uniformemente en puntos alejados de los bordes de los planos conductores; los valores absolutos de las densidades de carga eléctrica crecen conforme nos aproximamos a dichos bordes. Sin embargo, si la distancia d que separa los planos conductores es significativamente menor que las dimensiones de dichos planos, es posible despreciar estos efectos de borde y considerar, en primera aproximación, que las cargas eléctricas se distribuyen prácticamente de manera uniforme en los planos conductores, estando descritas por sendas densidades superficiales de carga constantes y opuestas:



$$d \lll S^{1/2} \implies \begin{cases} \sigma_e|_{\Pi_1} = \sigma_e(x=0, y, z) \cong \sigma_0 \\ \sigma_e|_{\Pi_2} = -\sigma_e(x=d, y, z) \cong -\sigma_0 \end{cases}$$

En consecuencia, las cantidades opuestas de carga distribuidas en los planos conductores serán:

$$Q|_{\Pi_1} = \int_{\Pi_1} \sigma_e \, dS \cong \sigma_0 S = +Q$$

$$Q|_{\Pi_2} = \int_{\Pi_2} \sigma_e \, dS \cong -\sigma_0 S = -Q$$

Como pudo comprobarse en el ejercicio dedicado al estudio del [campo eléctrico creado por planos cargados uniformemente](#), dos distribuciones superficiales de carga constantes y opuestas, localizadas en dos planos paralelos enfrentados separadas por vacío, sólo crean campo eléctrico en los puntos situados entre los planos. Y éste es uniforme, perpendicular a los planos cargados y de módulo proporcional al valor absoluto de la densidad constante de carga. En el caso que nos ocupa, se tendrá que...

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{i} = \vec{E}_0, \text{ para } 0 < x < d$$

Este campo eléctrico implica la existencia de un potencial electrostático $V(\vec{r})$, en el que las superficies conductoras son superficies equipotenciales. La diferencia de potencial entre ambas es igual a la circulación del campo entre sendos puntos de dichos conductores. Si se calcula a lo largo de una línea cuyos puntos estén todos situados entre los planos Π_1 y Π_2 , se tendrá:

$$V|_{\Pi_1} = V_1 > V_2 = V|_{\Pi_2}; \text{ tales que } V_1 - V_2 = \int_{C_1}^{C_2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = \int_{x=0}^{x=d} (\sigma_0/\epsilon_0) dx = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} d$$

Capacidad eléctrica del condensador plano paralelo

Las propiedades eléctricas y el comportamiento de un condensador en un circuito están caracterizadas por su **capacidad eléctrica** C , definida como la relación entre la carga eléctrica que se distribuye en uno de sus conductores y la diferencia de potencial entre éste y el otro conductor. Se trata de un parámetro que depende de la geometría del sistema (forma de los conductores, posición relativa,...) y del medio dieléctrico que se interpone entre los conductores. En el caso del condensador plano paralelo analizado, con espacio vacío entre los conductores, la capacidad eléctrica C_0 será:

$$C = \frac{Q|_{\Pi_1}}{V|_{\Pi_1} - V|_{\Pi_2}} = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Rightarrow C_0 \approx \frac{\sigma_0 S}{(\sigma_0/\epsilon_0) d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

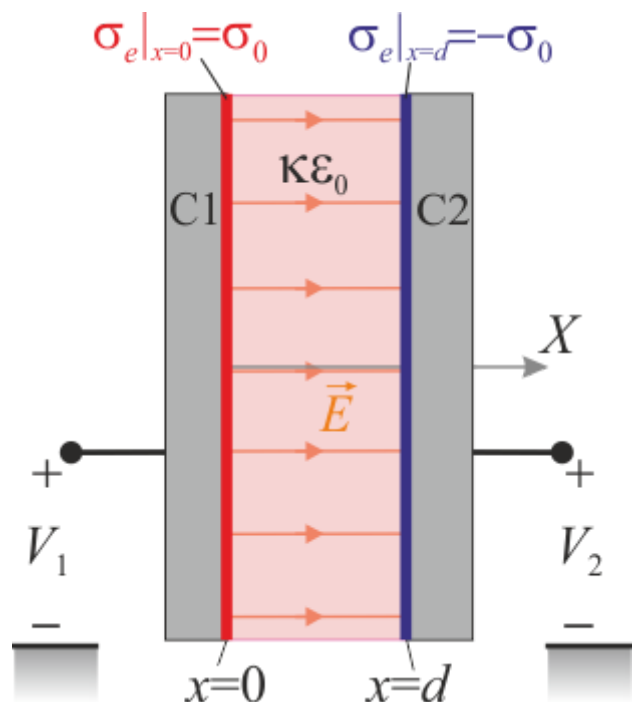
Hay que insistir en que anterior expresión se ha obtenido considerando despreciables o no significativos los efectos de acumulación de carga en los bordes de los conductores; es decir, en el caso de un condensador plano paralelo real el resultado anterior no es rigurosamente exacto, pero proporciona un valor de la capacidad eléctrica tanto más preciso, cuanto menor sea la distancia de separación entre los planos, en relación con las dimensiones de éstos.

Si entre los conductores de un condensador se coloca un conductor lineal homogéneo, la capacidad del condensador se multiplica por un factor κ (constante dieléctrica), que depende exclusivamente del material. En el caso del condensador plano paralelo, relleno de dieléctrico lineal...

$$C_\kappa = \kappa C_0 \approx \frac{\kappa \epsilon_0 S}{d}$$

Campo de ruptura del dieléctrico

En el caso del condensador relleno de un material dieléctrico lineal, existe otro importante parámetro de diseño: el **campo de ruptura dieléctrica**. Es decir, el valor máximo que puede tener la intensidad del campo eléctrico en el interior del medio dieléctrico sin que se produzca la ionización de las moléculas o átomos que lo componen. El valor de este campo de ruptura es una



característica de cada material, y va a condicionar cuál es la máxima diferencia de potencial que puede existir entre los conductores. En el caso del condensador plano paralelo relleno de dieléctrico lineal, el campo eléctrico en el interior también es uniforme. Por tanto...

$$\vec{E}(x, y, z) = E \vec{i}, \text{ cte.}, \text{ para } 0 < x < d \implies V_1 - V_2 = \int_{C_1}^{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = E d \implies$$

$$|\vec{E}| = \frac{V_1 - V_2}{d} \leq E_{\text{rup}}$$

3 Solución

3.1 Condensador plano relleno de aire

Se tienen dos discos conductores de radio $a = 6 \text{ cm}$, con los que se quiere construir un condensador relleno de aire cuya capacidad eléctrica sea de 100 pF , aproximadamente. Se trataría de un condensador plano paralelo con los planos de los discos conductores en influencia. Si el dieléctrico que separa los discos conductores es aire, la capacidad eléctrica de este condensador será:

$$C_{\text{air}} \approx \kappa_{\text{air}} \frac{\epsilon_0 S}{d}, \text{ con } S = \pi a^2 = 36 \pi \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

siendo d la distancia de separación entre los planos. La constante dieléctrica del aire es $\kappa_{\text{air}} = 1,00051 \cong 1,00$. Es decir, la capacidad eléctrica de un condensador es prácticamente la misma en vacío que relleno de aire. Por tanto, para que la capacidad el condensador sea la requerida, la distancia de separación deberá ser:

$$\left. \begin{array}{l} C_{\text{air}} \approx 100 \text{ pF} \\ C_{\text{air}} \approx \frac{\epsilon_0 S}{d} \end{array} \right\} \implies d = \frac{\epsilon_0 S}{C_{\text{air}}} = \frac{10^{-4} \text{ nF m}}{100 \text{ pF}} = 1 \text{ mm}$$

Se comprueba que las dimensiones de los discos (sus diámetros), son considerablemente mayores que la distancia de separación,

$$D = 2a = 120 \text{ mm} \gg 1 \text{ mm} = d$$

por lo que es de esperar que la expresión utilizada para la capacidad eléctrica del condensador, proporciona valores adecuados de esta magnitud.

Para determinar cuál es la máxima diferencia de potencial que se puede aplicar entre los conductores de este condensador, imponemos la condición de que la

intensidad del campo eléctrico uniforme que exista dentro del condensador, no puede superar el campo de ruptura del aire:

$$|\vec{E}| = \frac{V_1 - V_2}{d} < E_{\text{air}} = 3 \text{ kV/mm} \implies V_1 - V_2 < E_{\text{air}} d = 3 \text{ kV} = \Delta V_{\text{max}}$$

3.2 Condensador plano relleno de dieléctrico (lámina de papel)

Se separan los discos conductores mediante una lámina de papel de espesor $\delta = 0,1 \text{ mm}$, cuya constante dieléctrica es $\kappa_{\text{pap}} \approx 4$. En estas condiciones, la capacidad del condensador plano paralelo será:

$$C_{\kappa_{\text{pap}}} \approx \kappa_{\text{pap}} \frac{\epsilon_0 S}{\delta} = 4 \text{ nF}$$

Para determinar ahora la diferencia de potencial máxima que puede establecerse entre los conductores, se ha de tener en cuenta que han cambiado tanto el campo de ruptura como la distancia de separación:

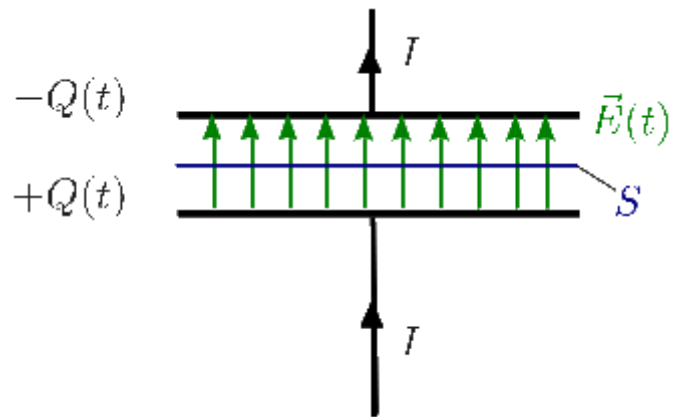
$$|\vec{E}| = \frac{V_1 - V_2}{\delta} < E_{\text{pap}} = 12 \text{ kV/mm} \implies V_1 - V_2 < E_{\text{air}} \delta = 1,2 \text{ kV} = \Delta V_{\text{max}}$$

1 Enunciado

Tenemos un condensador plano de placas circulares de radio $R = 2.30 \text{ cm}$ separadas por una distancia $d = 1.10 \text{ mm}$. Al condensador llega una corriente $I = 5.00 \text{ A}$. Calcula la corriente de desplazamiento en el interior del condensador.

2 Solución

La corriente que llega al condensador provoca que en una de sus placas aparezca una carga $Q(t)$. Esta carga crea un campo eléctrico entre las cargas y produce una carga $-Q(t)$ en la placa opuesta, pues ambas placas están en influencia total. Este campo eléctrico depende del tiempo, y la corriente de desplazamiento es proporcional a la derivada en el tiempo del flujo eléctrico de este campo. Si llamamos I_0 a la corriente que llega a las placas tenemos



$$I_0 = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Esto es así por que la carga que lleva la corriente no puede atravesar el condensador y queda depositada en la placa del condensador.

Como el radio de las placas del condensador es mucho menor que la distancia que las separa ($R \ll d$), está justificado despreciar los efectos de borde. Suponemos entonces que el campo eléctrico entre las placas del condensador es uniforme y perpendicular a las placas

$$\vec{E}(t) = E_0(t) \vec{u}$$

El vector \vec{u} es un vector unitario que va desde la placa con carga positiva a la negativa.

Vimos en el tema dos que el campo creado entre dos placas con densidades de carga del mismo valor absoluto y signos contrarios era

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$$

donde σ es la densidad superficial de carga. En nuestro caso la densidad superficial de carga es

$$\sigma = \frac{Q(t)}{A}$$

siendo $A = \pi R^2$ el área de las placas del condensador. Entonces el campo eléctrico entre las placas puede escribirse

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A} \vec{u}$$

Vamos a calcular la corriente de desplazamiento que atraviesa el condensador. El flujo eléctrico a través de una superficie paralela a las placas es

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S (E_0(t) \vec{u}) \cdot (dA \vec{u}) = \int_S E_0(t) dA$$

Como el campo eléctrico es uniforme tenemos

$$\Phi_e = E_0(t) A = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A} A = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

La corriente de desplazamiento es

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Pero este valor es igual a la corriente que llega a las placas.

$$I_d = I_0 = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Vemos entonces que la corriente de desplazamiento entre las placas del condensador es igual a la corriente de conducción en el cable. Este hecho es el que hace que la Ley de Ampère-Maxwell pueda aplicarse a cualquier superficie apoyada en una curva cerrada. La Ley es

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I + I_d]_{S_{\Gamma}}$$

En el sistema de la figura, consideramos dos superficies apoyadas en la curva cerrada Γ . Si aplicamos la Ley de Ampère en la superficie S_1 tenemos

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I + I_d]_{S_1} = \mu_0 I_0$$

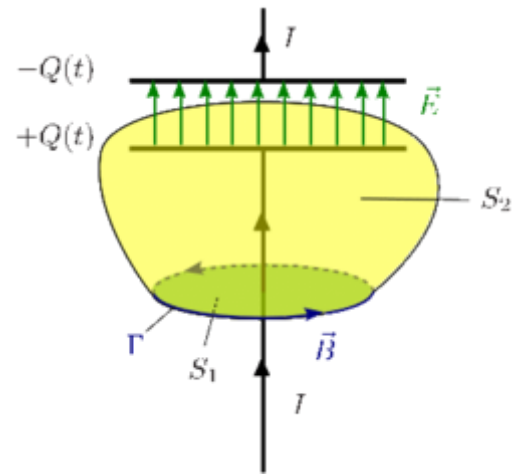
Mientras que si lo hacemos en la superficie dos tenemos

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I + I_d]_{S_2} = \mu_0 I_d = \mu_0 I_0$$

Hay que señalar que el hecho de que la corriente de conducción en el cable y la corriente de desplazamiento en el interior del condensador sean numéricamente iguales **no quiere decir** que podamos escribir la Ley de Ampère-Maxwell así

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I + I_d]_{S_{\Gamma}} = \mu_0 [2 I_0]_{S_{\Gamma}}$$

Esto **no es correcto**. La corriente de conducción y la de desplazamiento aparecen en lugares distintos. La de conducción en el cable y la de desplazamiento en el interior del condensador.



1 Enunciado

Se tienen dos discos plásticos de radio 1 cm y espesor despreciable, sobre los cuales se distribuyen de manera uniforme cargas de +1 nC y -1nC respectivamente. Estos discos se disponen paralelamente a una distancia a . Determine

1. El valor aproximado de la diferencia de potencial entre los centros cuando la distancia $a = 1$ mm
2. El valor aproximado del voltaje si $a = 1$ m.
3. Determine exactamente la diferencia de potencial entre los centros para cualquier valor de a . Compare el resultado con los dos anteriores. ¿Cuánto es aproximadamente el error cometido en el primer apartado? ¿Y en el segundo?

2 Pequeña distancia

En el primer caso situamos los discos a una distancia mucho menor que su propio radio, siendo uniforme la distribución de carga sobre ellos.

Esta configuración es muy parecida a la de un condensador de placas paralelas, separadas una distancia a , menor que su radio. Como en el caso del condensador, que veremos más adelante, podremos suponer que el campo es uniforme entre los discos.

La aproximación que hacemos consiste en suponer que los discos se comportan como planos de extensión infinita. Esto es razonable siempre que no nos alejemos de ellos tanto que podamos apreciar su tamaño real. El campo creado por [dos planos infinitos](#) de carga uniforme, con densidades de carga iguales en magnitud, y opuestas en signo, vale

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & z < -\frac{a}{2} \\ \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \mathbf{u}_z & -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ \mathbf{0} & z > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Para hallar la diferencia de potencial entre centros integramos este campo desde el centro de un disco hasta el del otro. También podemos hallar el potencial en cada punto y calcular la diferencia entre los centros. En este caso no podemos suponer el origen de potencial en el infinito, por tratarse de planos infinitamente extensos. En su lugar, situamos el origen de potencial en el centro del sistema, resultando

$$\phi = \begin{cases} \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} & z < -\frac{a}{2} \\ -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} z & -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ -\frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} & z > \frac{a}{2} \end{cases}$$

La diferencia de potencial es entonces

$$\Delta V = \phi\left(-\frac{a}{2}\right) - \phi\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sigma_0 a}{\epsilon_0} = \frac{Qa}{\pi\epsilon_0 R^2}$$

(la densidad de carga, por ser uniforme, equivale a la carga total dividida por la superficie). El valor numérico de esta diferencia es

$$\Delta V = \frac{Qa}{\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Qa}{R^2} \simeq 9 \times 10^9 \frac{4 \times 10^{-9} \times 10^{-3}}{10^{-4}} \text{ V} = 360 \text{ V}$$

Vemos que el voltaje es relativamente elevado, y para una distancia tan pequeña, probablemente se produciría la llamada *ruptura dieléctrica*, en la que una chispa salta de una placa a la otra, descargando el sistema.

3 Gran distancia

Si la distancia $a = 1 \text{ m}$ no podemos suponer que se trata de dos discos prácticamente infinitos. Por el contrario, cada uno ve al otro como una carga prácticamente puntual. Al otro, pero no a sí mismo. Para hallar la diferencia de potencial superponemos el efecto de los dos discos, de forma que el potencial en cada punto se escribe

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_+(\mathbf{r}) + \phi_-(\mathbf{r})$$

Primero tomaremos el de carga positiva, hallaremos el potencial en un punto muy alejado y en su propio centro y calcularemos la diferencia. Sumando el mismo cálculo para el de carga negativa tendremos la diferencia total.

$$\Delta V = \phi(A) - \phi(B) = (\phi_+(A) + \phi_-(A)) - (\phi_+(B) + \phi_-(B)) = (\phi_+(A) - \phi_+(B)) + (\phi_-(A) - \phi_-(B)) = \Delta V_+ + \Delta V_-$$

Para el disco inferior resulta

$$\Delta V_+ = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{E}_+ \cdot d\mathbf{r} = \phi_+(z = -a/2) - \phi_+(z = a/2)$$

En $z = -a/2$ estamos situados en el centro del disco y el potencial en este punto (tomando el origen en el infinito) lo obtenemos a partir de la expresión

$$\phi_+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_s dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

que, en nuestro caso

$$\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}' = \rho' \mathbf{u}_{\rho'} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \rho' \quad dS' = \rho' d\rho' d\varphi'$$

$$\phi_+\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_s \rho' d\varphi' d\rho'}{\rho'} = \frac{\sigma_s R}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Al desplazarnos al punto $z = a/2$ ya estamos lo suficientemente lejos del disco para verlo como una carga puntual y el potencial en este punto (tomando de nuevo el origen de potencial en el infinito) es, aproximadamente,

$$\phi_+\left(\frac{a}{2}\right) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

La diferencia de potencial debida al disco de carga positiva vale entonces

$$\Delta V_+ \simeq \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Para el disco de carga negativa resulta la misma diferencia de potencial, al cambiar tanto el orden en la resta como el signo de la carga, con lo que

$$\Delta V = \Delta V_+ + \Delta V_- = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}$$

El valor numérico de esta cantidad es

$$\frac{Q}{\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4Q}{R} \simeq 3600 \text{ V} \quad \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a} \simeq 18 \text{ V} \quad V = 3572 \text{ V}$$

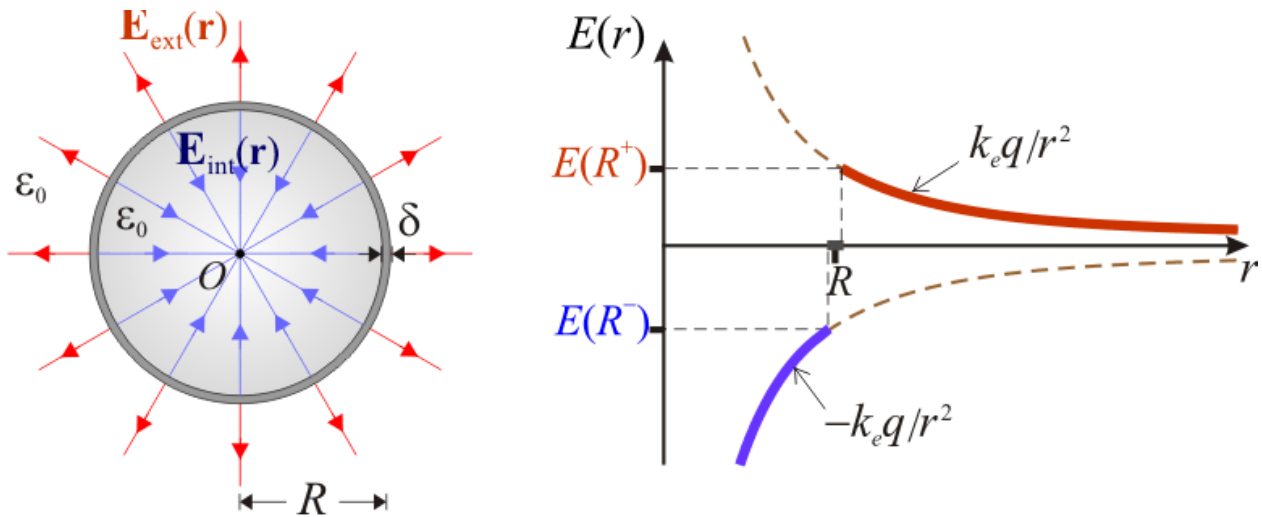
1 Enunciado

Un corteza esférica de un material conductor ideal, tiene un radio R y un espesor δ , tal que $\delta \ll R$, de manera que puede considerarse como una superficie esférica Σ . Realizando una serie de medidas tanto en el exterior de la corteza (donde no hay otras cargas próximas), como en el espacio interior delimitado por Σ , se determina que hay un campo eléctrico radial cuyas líneas se cortan en el centro O de la superficie esférica conductora:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{u}_r(\mathbf{r}) = \begin{cases} -k_e q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}; & \text{si } |\mathbf{r}| < R^- = R - \frac{\delta}{2} \\ k_e q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}; & \text{si } |\mathbf{r}| > R^+ = R + \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

(con $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$)

1. Indique qué distribuciones de carga eléctrica producen dicho campo eléctrico.
2. ¿Cómo es el potencial electrostático creado por dichas cargas?
3. Acciones del campo sobre un dipolo eléctrico.



2 Solución

2.1 Distribuciones de carga

2.1.1 En el interior de la corteza conductora

En los puntos del interior hueco de la corteza existe un campo radial cuyas líneas convergen al centro O de la corteza, y definido por la función de campo

$$\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = -k_e q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \forall P \text{ tal que } |\mathbf{r}| < R^-$$

Obsérvese que esta expresión se corresponde con el **campo creado por una carga puntual de valor $-q < 0$** , situada en el centro O . Por si hubiese alguna duda, podemos aplicar la ley de Gauss en superficies cerradas contenidas en el interior de la corteza conductora:

$$\oint_{\partial\tau_{\text{int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Big|_{\tau_{\text{int}}} \quad \partial\tau_{\text{int}} : r(\text{cte.}) < R^-$$

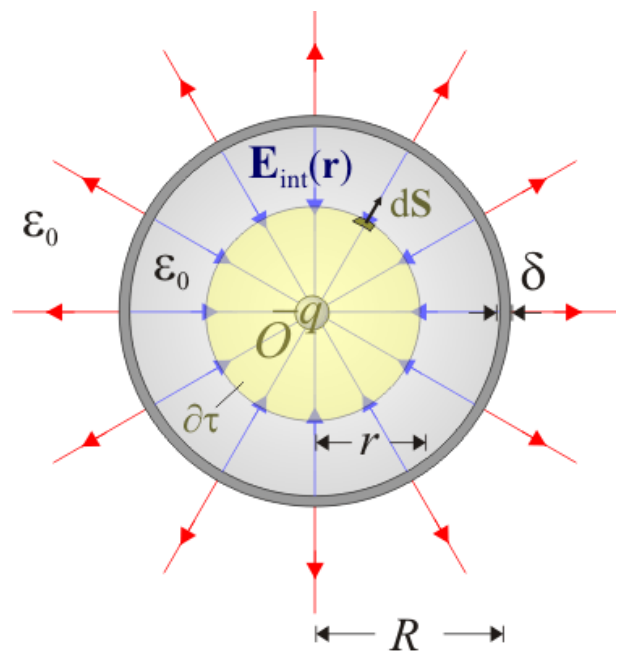
Tomemos una $\partial\tau$ esférica, con centro en O y radio arbitrario $r < R^-$ y calculemos el flujo del campo eléctrico a través de la misma. El vector elemento de superficie dS en cada punto de $\partial\tau_{\text{int}}$ tiene la dirección y el sentido del vector r que determina la posición de dicho punto respecto de O ; por tanto, es paralelo al campo eléctrico en dicho punto:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \Big|_{P \in \partial\tau_{\text{int}}} = \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{S} = -k_e q \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} dS = -k_e q \frac{dS}{r^2}$$

Todos los puntos de los puntos de la superficie $\partial\tau$ se encuentra a la misma distancia r , por tanto es un valor constante en el integrando de la expresión que formula la ley de Gauss:

$$\oint_{\partial\tau_{\text{int}}} \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{k_e q}{r^2} \int_{\partial\tau_{\text{int}}} dS = -\frac{k_e q}{r^2} 4\pi r^2 = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

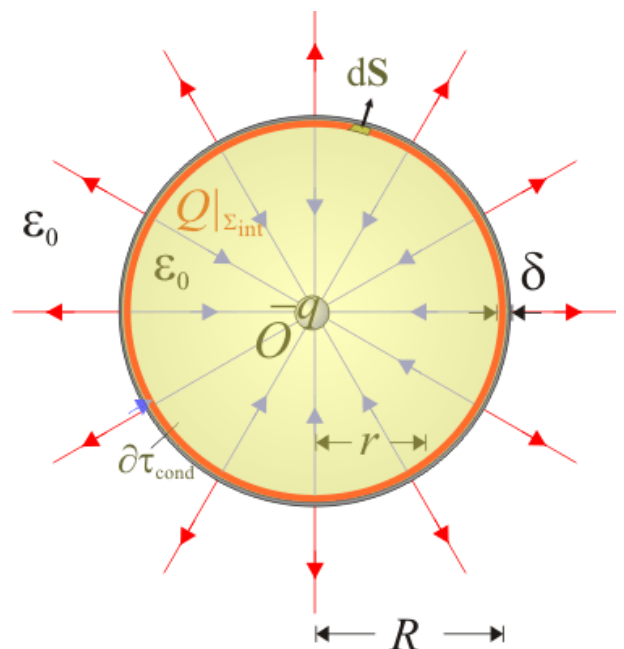
$$\Rightarrow \boxed{Q \Big|_{\tau_{\text{int}}} = -q, \quad \forall \partial\tau_{\text{int}} \quad \text{tal que} \quad 0 < r < R^-}$$



Es decir, la cantidad total de carga encerrada en toda superficie gaussiana esférica $\partial\tau_{\text{int}}$, con centro en O y cualquiera que sea el valor de su radio entre 0 y R^- , es siempre $-q$. Este resultado, junto con el carácter radial del campo eléctrico, sólo es compatible con que la única carga localizada en el interior hueco de la corteza conductora sea una puntual de valor $-q$ situada en el centro O .

2.1.2 En la cara interior de la corteza conductora

En virtud del teorema de Faraday, en la cara interior de la corteza conductora, $\Sigma_{\text{int}}: r = R^-$, va existir una carga inducida en cantidad opuesta a la que se haya en el hueco interior. Este resultado se obtiene de aplicar la ley de Gauss en un superficie cerrada $\partial\tau_{\text{cond}}$, tal que todos sus puntos se encuentra en la corteza conductora; es decir, entre las superficies $\Sigma_{\text{int}}: r = R^-$ y $\Sigma_{\text{ext}}: r = R^+$. Por una parte, el campo eléctrico es nulo en cualquier punto de dicha región conductora de espesor δ ; por otra, la carga eléctrica dentro de dicha gaussiana será igual a la carga puntual que hemos calculado en el centro O del hueco, más la carga que hubiera distribuida en la superficie interior de la corteza conductora:



$$0 = \oint_{\partial\tau_{\text{cond}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Big|_{\tau_{\text{cond}}} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(-q + Q \Big|_{\Sigma_{\text{int}}} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{Q \Big|_{\Sigma_{\text{int}}} = -(-q) = q}$$

Como la carga puntual del centro O equidista de todos los puntos de la superficie Σ_{int} , la carga inducida en dicha superficie se distribuirá uniformemente, dando lugar a una densidad superficial de carga constante,

$$\sigma_e|_{\Sigma_{\text{int}}} = \frac{Q}{S}|_{\Sigma_{\text{int}}} = \frac{q}{4\pi(R - \delta/2)^2} \approx \frac{q}{4\pi R^2} = \sigma_0$$

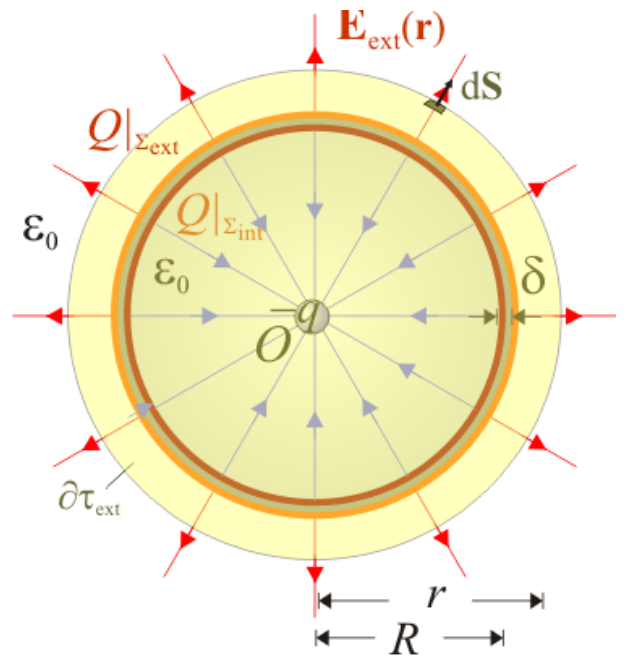
donde para obtener su valor aproximado se ha considerado que el espesor δ de la corteza de es prácticamente despreciable frente a su radio R .

2.1.3 En la cara exterior de la corteza

La carga puntual $-q$ en el centro O de la corteza conductora y la carga q distribuida en la superficie interior Σ_{int} determinarían que, en virtud de la ley de Gauss, el campo eléctrico fuese nulo para todos los del espacio tales que $|\mathbf{r}| > R^-$. Por tanto, la presencia de un campo eléctrico exterior a la corteza,

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = +k_e q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \forall P \text{ tal que } |\mathbf{r}| > R^+$$

requiere la existencia de otra distribución de carga eléctrica. Como se sabe, éste no puede localizarse en el interior de la corteza (medio conductor), pero sí en su superficie exterior $\Sigma_{\text{ext}} : r = R^+$. Pero además, la anterior expresión del campo exterior implica que no puede haber cargas en el espacio que rodea a la corteza conductora: es decir, en puntos $|\mathbf{r}| = r > R^+$. Esto puede comprobarse (¡como no!) mediante la ley de Gauss evaluada en una superficie esférica $\partial\tau_{\text{ext}}$ con centro en O y radio mayor que R^+ :



$$\oint_{\partial\tau_{\text{ext}}} \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{S} = +\frac{k_e q}{r^2} \int_{\partial\tau_{\text{ext}}} dS = +\frac{k_e q}{r^2} 4\pi r^2 = +\frac{q}{\epsilon_0}, \quad \forall r > R^+$$

Si el valor de este flujo es el mismo, independientemente del valor del radio (siempre que sea mayor que R^+), toda la carga q debe estar distribuida en la superficie exterior Σ_{ext} ; además, la simetría esférica del campo \mathbf{E}_{ext} está directamente relacionada con que la carga se distribuye uniformemente en la superficie conductora exterior:

$$Q|_{\Sigma_{\text{ext}}} = q$$

$$\sigma_e|_{\Sigma_{\text{ext}}} = \frac{Q}{S}|_{\Sigma_{\text{ext}}} = \frac{q}{4\pi(R + \delta/2)^2} \approx \frac{q}{4\pi R^2} = \sigma_0$$

2.2 Potencial electrostático

Como se sabe, conocido el valor de potencial en un determinado punto P_0 del espacio, $V(P_0) = V_0$, para cualquier otro punto P se tendrá:

$$V(P) = V_0 - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Considerando que la posición del punto genérico P está determinada por el radio-vector posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, la expresión general de la función de campo puede expresarse en términos de una

integral indefinida para el campo eléctrico más una constante de integración, que ha de ajustarse de manera que se verifique la condición sobre el valor conocido del potencial para $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP}_0$:

$$V(\mathbf{r}) = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + C, \quad \text{tal que} \quad V(\mathbf{r}_0) = V_0$$

2.2.1 En el exterior

En los puntos exteriores a la distribución de carga se tendrá:

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = - \int \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} + C_{\text{ext}}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \geq R^+$$

Si expresamos el vector-posición \mathbf{r} en términos de su módulo r y del vector unitario $\mathbf{u}_r(P)$, en la dirección y el sentido del segmento \overrightarrow{OP} , se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = r \mathbf{u}_r(P) \\ d\mathbf{r} = dr \mathbf{u}_r(P) + r d\mathbf{u}_r|_P \end{array} \right\} \implies \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = +k_e q \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = +k_e q \frac{dr}{r^2}$$

pues al ser $\mathbf{u}_r(P)$ un vector de módulo constante (siempre igual a la unidad), en todo punto se cumplirá que $d\mathbf{u}_r|_P \perp \mathbf{u}_r(P)$. En consecuencia, el potencial electrostático creado en el exterior de la distribución esférica de será:

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -k_e q \int \frac{dr}{r^2} + C_{\text{ext}} = k_e \frac{q}{r} + C_{\text{ext}}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \geq R^+$$

La constante de integración C_{ext} se ha de determinar a partir de valor del potencial en un punto del dominio de definición; es decir, un punto del exterior. Obsérvese que los puntos infinitamente alejados de la distribución pertenecen a dicho dominio, y puesto que la carga Q_0 se distribuye en una región finita (la esfera de radio R), la perturbación que produce (es decir, el campo eléctrico o el potencial electrostático) va a ser poco significativa e incluso despreciable en puntos muy alejados. En consecuencia, la constante de integración C_{ext} debe ser tal que:

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = C_{\text{ext}} = 0 \quad \implies \quad V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = k_e \frac{q}{|\mathbf{r}|}, \quad \text{para} \quad |\mathbf{r}| = r \geq R^+$$

2.2.2 En la corteza conductora

En los puntos del interior del conductor ($R^- \leq |\mathbf{r}| \leq R^+$), el campo eléctrico en situación de equilibrio electrostático es nulo, por tanto:

$$V_{\text{cond}}(\mathbf{r}) = - \int \underbrace{\mathbf{E}_{\text{cond}}}_{=0} \cdot d\mathbf{r} + C_{\text{cond}} = C_{\text{cond}}, \quad \text{para} \quad R^- \leq |\mathbf{r}| \leq R^+$$

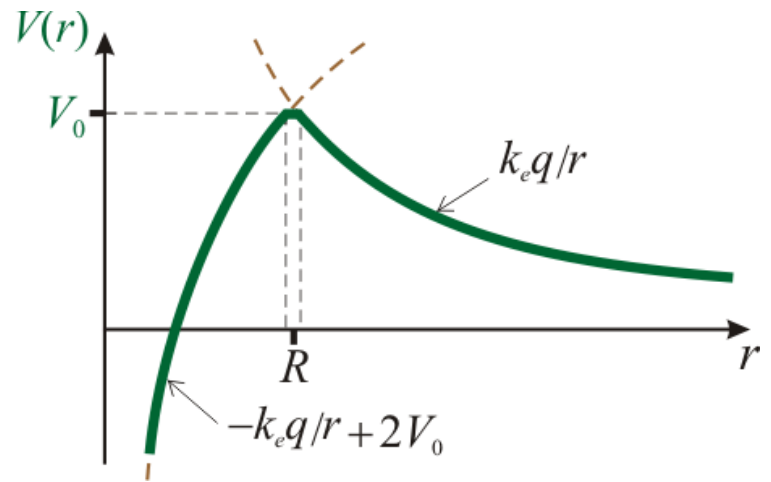
Es decir, la corteza conductora es una región equipotencial. Para determinar el valor uniforme del potencial en dicha región, exigimos la continuidad del potencial en los puntos de la cara exterior de la corteza conductora:

$$V_{\text{ext}}(r = R^+) = k_e \frac{q}{R^+} = C_{\text{cond}} = V_{\text{cond}}(r = R^+) \quad \implies$$

$$V_{\text{cond}}(\mathbf{r}) = k_e \frac{q}{R + \delta/2} \approx k_e \frac{q}{R} = V_0, \quad \text{para} \quad R^- \leq |\mathbf{r}| \leq R^+$$

2.2.3 En el interior

Para determinar el potencial en el interior hueco de la corteza conductora procedemos de la misma manera que en los subapartados anteriores:



$$V_{\text{int}}(\mathbf{r}) = - \int \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r} + C_{\text{int}}, \quad \text{para } |\mathbf{r}| = r \leq R^-$$

Operando de manera análoga se obtiene:

$$V_{\text{int}}(\mathbf{r}) = k_e q \int \frac{dr}{r^2} + C_{\text{int}} = -k_e \frac{q}{r} + C_{\text{int}}, \quad \text{para } |\mathbf{r}| = r \leq R^-$$

... y para determinar la constante de integración C_{int} volvemos a exigir la continuidad del potencial, pero ahora en los puntos de cara interior Σ_{int} de la corteza:

$$V_{\text{cond}}(r = R^-) = k_e \frac{q}{R + \delta/2} = -k_e \frac{q}{R - \delta/2} + C_{\text{int}} = V_{\text{int}}(r = R^-) \implies C_{\text{int}} = k_e q \frac{2R}{R^2 - (\delta/2)^2} \approx 2V_0$$

Por tanto, el potencial electrostático en la región interior a la corteza esférica es:

$$V_{\text{int}}(\mathbf{r}) \approx -k_e \frac{q}{|\mathbf{r}|} + 2V_0, \quad \text{para } |\mathbf{r}| = r \leq R^-$$

Dos esferas metálicas conectadas a potencial fijo (F2GIA)

De Laplace

1 Enunciado

Dos esferas metálicas conductoras de distintos radios, R_1 y R_2 , se encuentran muy alejadas entre sí, aunque conectadas mediante un hilo conductor perfecto de gran longitud. La esfera mayor (de radio R_1) está conectada a un generador ideal de fuerza electromotriz V_0 . Asumiendo que la distancia de separación entre las esferas es suficiente como para considerar que no hay influencia entre ellas, analice los valores del potencial, carga eléctrica, densidad superficial de carga e intensidad del campo eléctrico en las superficies de ambos conductores.

2 Solución

Las dos esferas metálicas están conectadas mediante un hilo que se considera conductor perfecto. Por tanto, cuando tras conectar la esfera mayor al generador ideal, el sistema alcanza el equilibrio electrostático, el valor del potencial en ambas esferas será V_0 . En particular, la superficies esféricas $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$ serán equipotenciales:

$$V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} = V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2} = V_0$$

En ellas se almacenarán sendas cantidades de carga eléctrica, Q_1 y Q_2 . Se considera que las esferas están lo suficientemente alejadas como para que no haya una influencia apreciable entre ellas. Por tanto, la relación entre la cantidad de carga y el valor del potencial en cada superficie estará determinado por el correspondiente valor de su capacidad eléctrica.

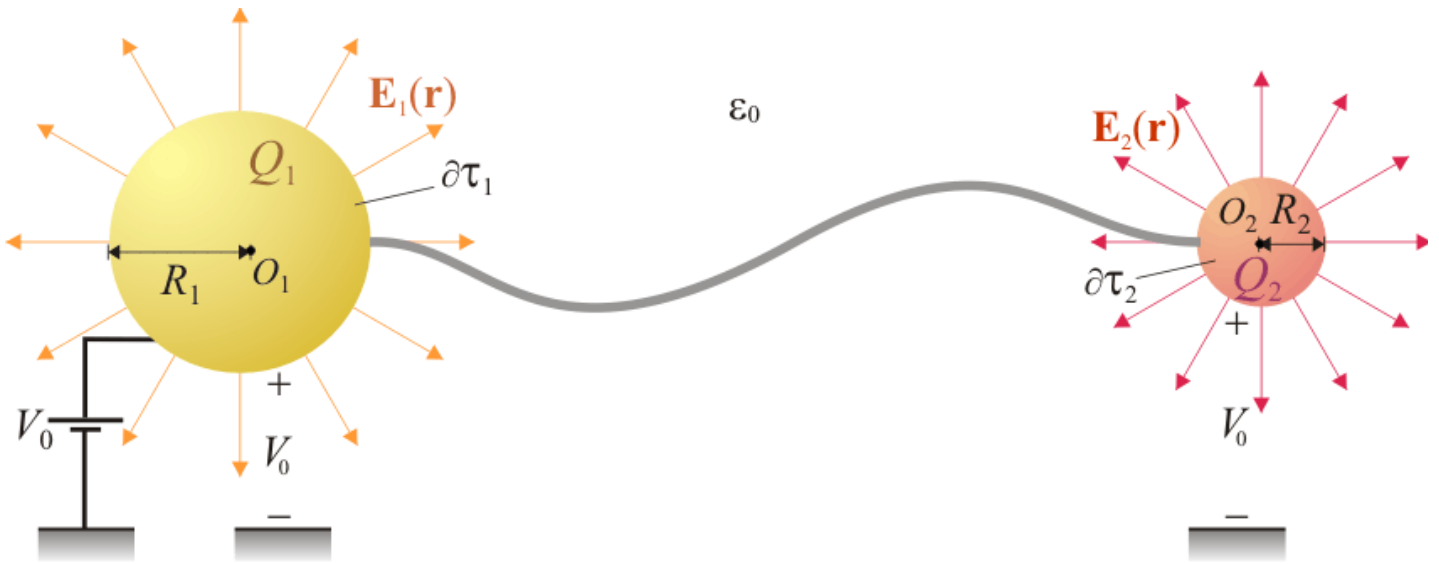
$$Q_1 = C_1 V_0; \quad Q_2 = C_2 V_0$$

Si además de considerar las esferas muy alejadas, despreciamos el posible efecto del cable conductor, podemos asumir que la carga eléctrica se distribuye homogéneamente en cada una de las superficies, de manera que los valores C_1 y C_2 serán los correspondientes a las capacidades eléctricas de superficies eléctricas de radios R_1 y R_2 . Recordemos cómo se obtenían tales valores: las distribuciones uniformes de carga eléctrica en las superficies $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$ crearán sendos campos potenciales electrostáticos en los entorno de cada esfera:

$$V_1(\mathbf{r}) = k_e \frac{Q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}; \quad V_2(\mathbf{r}) = k_e \frac{Q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

donde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son los radiovectores que indican la posición de los centros de las esferas, O_1 y O_2 , respecto del punto elegido como origen del sistema de referencia. Los puntos de las superficies esféricas $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$ se hallan a distancias R_1 y R_2 , de sus respectivos centros; por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} = k_e \frac{Q_1}{R_1} = V_0 \quad \longrightarrow \quad Q_1 = \overbrace{4\pi\epsilon_0 R_1}^{=C_1} V_0 \\ V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2} = k_e \frac{Q_2}{R_2} = V_0 \quad \longrightarrow \quad Q_2 = \underbrace{4\pi\epsilon_0 R_2}_{=C_2} V_0 \end{array} \right\} \implies Q_1 > Q_2$$



Y puesto que hemos asumido que las cargas se distribuyen uniformemente, las densidades superficiales en cada una de las esferas conductoras serán,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} &= \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_1} \\ \sigma_e(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2} &= \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_e(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} < \sigma_e(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2}$$

Las cargas Q_1 y Q_2 crean sendos campo eléctricos,

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = k_e Q_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}; \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = k_e Q_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}$$

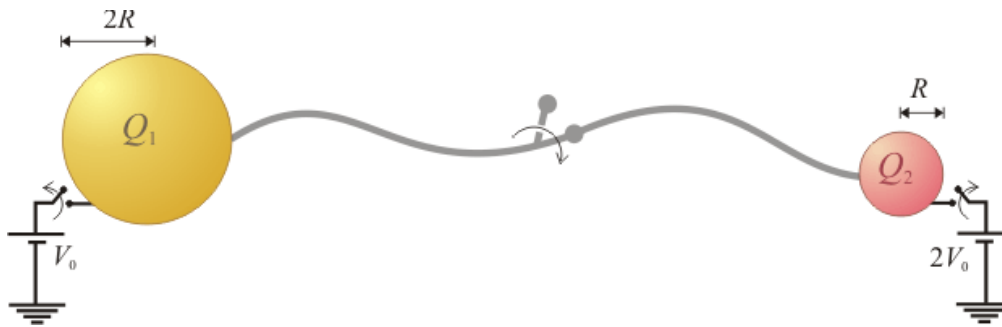
en las proximidades de los conductores. La intensidad de estos campos en las superficies conductoras son:

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{E}_1(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{V_0}{R_1} = \frac{\sigma_e(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Big|_{\partial\tau_1} \\ |\mathbf{E}_2(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2} &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = \frac{V_0}{R_2} = \frac{\sigma_e(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Big|_{\partial\tau_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\mathbf{E}_1(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} < |\mathbf{E}_2(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2}$$

1 Enunciado

Se tienen dos esferas conductoras separadas por una distancia mucho mayor que sus respectivos radios, R y $2R$, de modo que no hay una influencia apreciable entre ellas.

1. Las esferas conductoras se conectan a sendos generadores que establecen valores fijos de potencial, $2V_0$ y V_0 , respectivamente. Una vez que se han cargado, se procede a su desconexión. ¿Qué cantidad de energía electrostática se almacena en el sistema?
2. Estando en la situación final del apartado anterior, la esferas se conectan entre sí mediante un cable conductor muy largo y con resistencia eléctrica no nula. Determine la cantidad de carga eléctrica y el valor del potencial en cada una de las esferas cuando el sistema recobra el equilibrio. ¿Qué cantidad de energía electrostática se habrá disipado en el cable por efecto Joule al final del proceso?



2 Solución

2.1 Energía, cargas y valores de potencial

En un sistema electrostático donde la carga eléctrica se distribuye de forma continua en una determinada región de fuentes \mathcal{F} , la energía electrostática almacenada en el sistema responde a la expresión,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} V dq$$

donde $V(\mathbf{r})$ es el potencial electrostático creado por la distribución. Como se recordará, esta energía es el trabajo externo que ha sido necesario realizar para configurar dicha distribución de carga eléctrica estática.

Obsérvese que la región \mathcal{F} no ha de ser necesariamente conexa; es decir, puede estar formada por diferentes regiones, conectadas o no. Si las esferas conductoras del sistema analizado se cargan con sendas cantidades Q_1 y Q_2 de carga eléctrica, por ejemplo conectándolas a generadores que establezcan valores constantes del potencial en todos sus puntos, dichas cargas se distribuirán en el equilibrio exclusivamente en sus superficies $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$, según determinadas densidades superficiales, $\sigma_e|_{\partial\tau_1}$ y $\sigma_e|_{\partial\tau_2}$:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\partial\tau_1} V(\mathbf{r}) \sigma_e(\mathbf{r}) dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\tau_2} V(\mathbf{r}) \sigma_e(\mathbf{r}) dS$$

Por otra parte, cada una de las superficies conductoras es una superficie equipotencial en la que el potencial electrostático tiene idéntico valor en todos sus puntos. Por tanto, se tendrá:

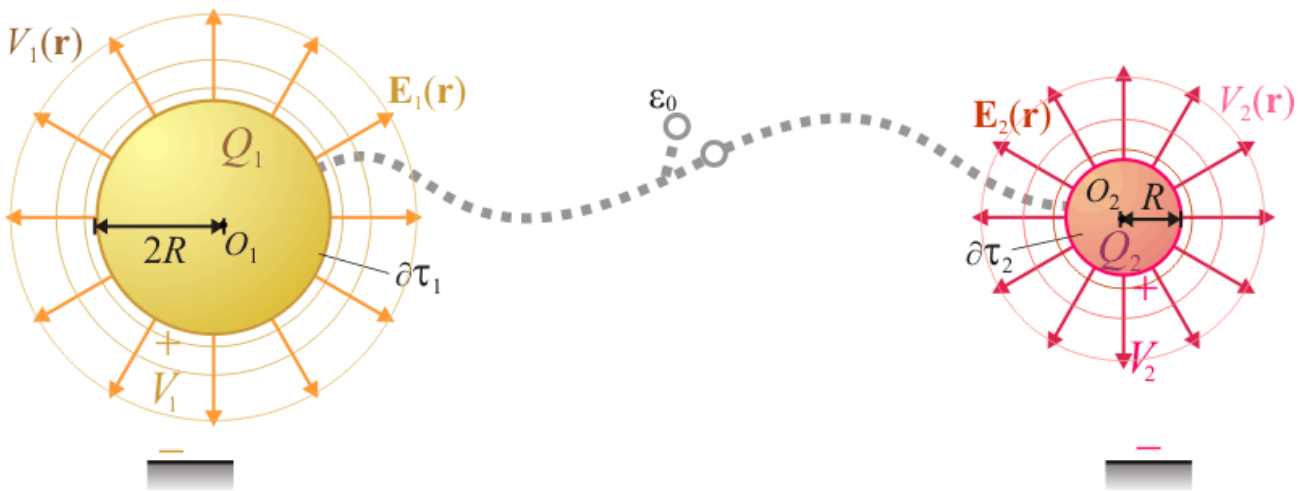
$$\left. \begin{array}{l} V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} = V_1 \\ V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2} = V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} \left(V_1 \int_{\partial\tau_1} \sigma_e(\mathbf{r}) dS + V_2 \int_{\partial\tau_2} \sigma_e(\mathbf{r}) dS \right) = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2)$$

Por tanto, para calcular las cantidades de energía electrostática requeridos en el ejercicio, basta con determinar los valores de las cargas y los potenciales de las esferas conductoras en las dos situaciones indicadas.

Las relaciones entre cantidades de carga eléctrica y valores de los potenciales en un sistema formado por dos esferas conductoras, lo suficientemente alejadas para que su influencia mutua sea despreciable, ya fueron analizadas en otro ejercicio de examen esta asignatura. En esta configuración, puede considerarse que las cargas se distribuyen uniformemente en cada una de las superficies conductoras. Por tanto, el campo eléctrico creado por cada distribución van a ser radial respecto del centro de la esfera correspondiente y, en consecuencia, las equipotenciales en el entorno de cada esfera serán (prácticamente) superficies esféricas concéntricas con aquella:

$$V_1(\mathbf{r}) \simeq k_e \frac{Q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}; \quad V_2(\mathbf{r}) \simeq k_e \frac{Q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

donde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son los radiovectores que indican la posición de los centros de las esferas, O_1 y O_2 , respecto del punto elegido como origen del sistema de referencia.



En el sistema bajo estudio, los puntos de las superficies esféricas $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$ se hallan a distancias $2R$ y R , de sus respectivos centros; por tanto,

$$V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_1} = k_e \frac{Q_1}{2R} = V_1 \quad \rightarrow \quad Q_1 = 8\pi\epsilon_0 R V_1 = C_1 V_1$$

$$V(\mathbf{r})|_{\partial\tau_2} = k_e \frac{Q_2}{R} = V_2 \quad \rightarrow \quad Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R V_2 = C_2 V_2$$

donde C_1 y C_2 son los parámetros geométricos que determinan la relación entre la carga almacenada en cada conductor y el valor del potencial (medido respecto del infinito) al que se encuentra su superficie. Obsérvese que, al estar muy alejadas y no existir influencia mutua, las esferas no constituyen un condensador. En todo caso, podría considerarse que cada una por separado lo formarían con el infinito; así, los parámetros C_1 y C_2 serían las capacidades eléctricas de esos virtuales condensadores.

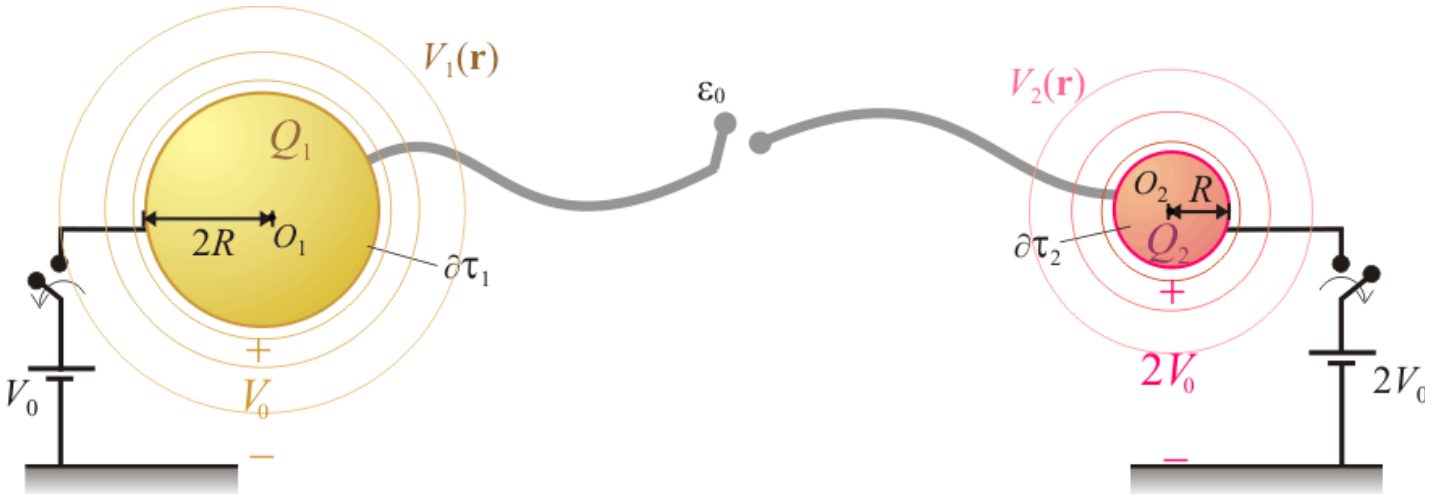
Por otra parte, aclararemos que, aunque en realidad podría llegar a almacenarse una cierta cantidad de carga en el cable conductor utilizado para conectar las esferas, consideraremos que ésta va a ser despreciable frente a la que va a haber en las esferas. Esta simplificación no impide obtener resultados razonablemente precisos, siempre que tamaño de las esferas no sea demasiado pequeño en relación con la longitud del hilo.

2.2 Cantidad de energía almacenada inicialmente

En la primera configuración, con las esferas conductoras desconectadas entre sí, se conectan a sendos generadores que fijan en ellas valores de potencial distintos. Los cantidades de carga

eléctrica que dichos generadores suministran a los conductores están determinadas por los correspondientes valores de capacidad eléctrica:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = V_0 \rightarrow Q_1 = 8\pi\epsilon_0 R V_0 \\ V_2 = 2V_0 \rightarrow Q_2 = 8\pi\epsilon_0 R V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1 = Q_2 = 8\pi\epsilon_0 R V_0 = Q_0$$



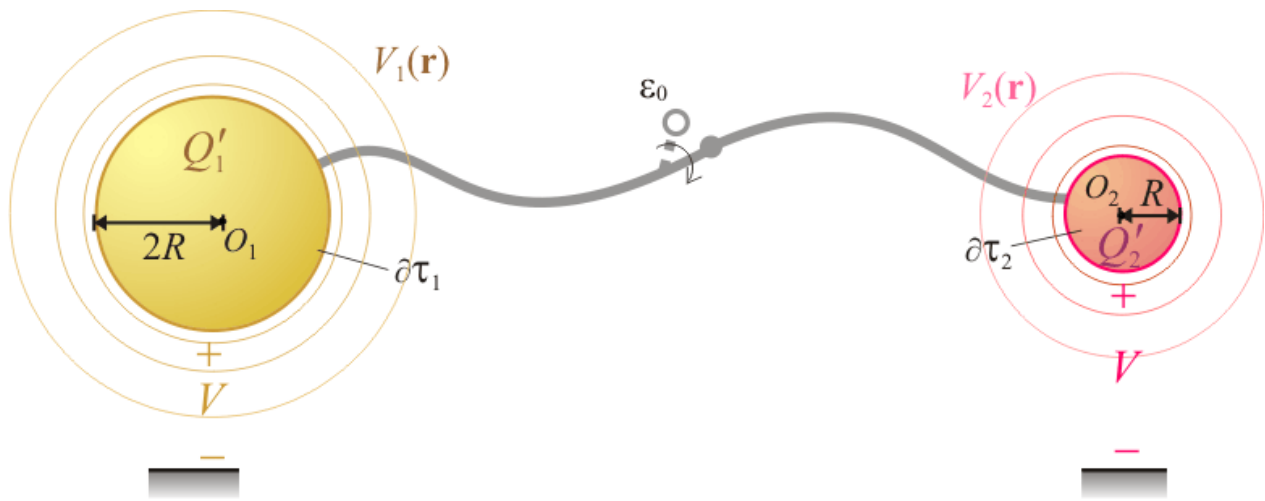
Cuando se desconectan los generadores, las cargas permanecen en los conductores y, en consecuencia, los valores del potencial en las esferas seguirán siendo V_0 y $2V_0$. En consecuencia, la energía electrostática almacenada en el sistema será:

$$U_e^{ini} = \frac{1}{2} (Q_0 V_0 + 2Q_0 V_0) = \frac{3}{2} Q_0 V_0 = 12\pi\epsilon_0 R V_0^2$$

2.3 Energía en el sistema tras la conexión de las esferas

Cuando, tras conectar las dos esferas mediante un cable largo, el sistema recupera el equilibrio, los valores de carga y potencial habrán cambiado. Como el cable es conductor, las superficies de las dos esferas son parte de la misma equipotencial, a la cuál corresponderá un valor V (aún no determinado) de potencial electrostático. Si las esferas se mantienen suficientemente alejadas y el efecto del cable se considera despreciable, la relación entre los valores de carga y potencial en cada una de ellas sigue estando determinada por las capacidades eléctricas C_1 y C_2 obtenidas en el [apartado 2.1](#). Por tanto, los valores de cargas y potenciales en las superficies $\partial\tau_1$ y $\partial\tau_2$ serán:

$$\left. \begin{array}{l} V'_1 = V \rightarrow Q'_1 = C_1 V'_1 = 8\pi\epsilon_0 R V \\ V'_2 = V \rightarrow Q'_2 = C_2 V'_2 = 4\pi\epsilon_0 R V \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{Q'_1}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow Q'_1 = 2Q'_2$$



Obsérvese que la variación de carga eléctrica en las superficies esféricas será exclusivamente debida al intercambio de carga que se haya producido a través del cable que las conecta pues, como se recordará, previamente se habían desconectados de los generadores. Es decir, tras dicha desconexión, el sistema formado por las dos esferas (más el cable) constituyen un sistema eléctricamente aislado en el que la carga total debe ser constante. Si, tal como dijimos, se desprecia la cantidad de carga almacenada en el cable, se tendrá:

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 2Q_0$$

Y aplicando la relación obtenida anteriormente para las cantidades de carga en las superficies esféricas...

$$Q'_1 + Q'_2 = (2Q'_2 + Q'_2) = 2Q_0 \implies \left\{ \begin{array}{l} Q'_1 = \frac{4}{3} Q_0 = \frac{32}{3} \pi \epsilon_0 R V_0 \\ Q'_2 = \frac{2}{3} Q_0 = \frac{16}{3} \pi \epsilon_0 R V_0 \end{array} \right\} \rightarrow V'_1 = V'_2 = V = \frac{4}{3} V_0$$

Por tanto, la energía electrostática almacenada en esta configuración es:

$$U_e^{\text{fin}} = \frac{1}{2} (Q'_1 V'_1 + Q'_2 V'_2) = \frac{4}{3} Q_0 V_0 = \frac{32}{3} \pi \epsilon_0 R V_0^2$$

Obsérvese que los valores de energía electrostática en el sistema, antes y después de la conexión de la esferas, son distintos. Si calculamos el incremento sufrido por esta magnitud,

$$\Delta U_e = U_e^{\text{fin}} - U_e^{\text{ini}} = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right) Q_0 V_0 = -\frac{4}{3} \pi \epsilon_0 R V_0^2 < 0$$

obtenemos que el proceso de conexión de las esferas ha supuesto una disminución de la energía electrostática del sistema. Este fenómeno tiene una sencilla explicación: el proceso de intercambio de carga eléctrica entre las esferas se realiza a través del cable conductor, dando lugar a la aparición de una corriente eléctrica transitoria que, por efecto Joule, disipará energía en forma de calor en una cantidad igual a la disminución de energía almacenada en el sistema.

De hecho, si se realiza el análisis de dicha corriente transitoria, utilizando el principio general de conservación de la carga, se obtiene que la cantidad de energía disipada por efecto Joule durante el proceso de recombinación de las cargas, coincide exactamente con el valor absoluto del incremento de energía electrostática que acabamos de obtener.

1 Enunciado

Se tienen dos condensadores idénticos, cada uno de ellos formado por dos discos conductores paralelos de sección S , separados por un medio dieléctrico de espesor d , constante dieléctrica κ y cuya ruptura dieléctrica se produce para un campo eléctrico de intensidad mayor o igual que un valor E_{rup} conocido. ¿Cómo deben asociarse para poder almacenar el máximo de energía eléctrica en el sistema resultante de la asociación?

2 Solución

Un condensador plano de sección S , y relleno de un dieléctrico de constante κ y espesor d , tiene una capacidad eléctrica

$$C = \kappa \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \kappa C_0$$

La energía electrostática de una asociación de condensadores rellenos de materiales dieléctricos, responde a la expresión general de esta magnitud para sistemas donde la carga eléctrica se halla distribuida en conductores en equilibrio:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} V dq = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

donde Q_i y V_i son, respectivamente, la cantidad de carga libre y el potencial del conductor i -ésimo. El valor máximo de energía electrostática que puede almacenar el sistema estará determinado por las diferencias de potencial máximas a que pueden ser sometidos los condensadores sin que el campo eléctrico en los dieléctricos llegue a superar el valor de ruptura E_{rup} . Comprobemos cuál es este valor máximo para el caso de las asociaciones en paralelo y en serie de los dos condensadores plano idénticos que se consideran en este ejercicio.

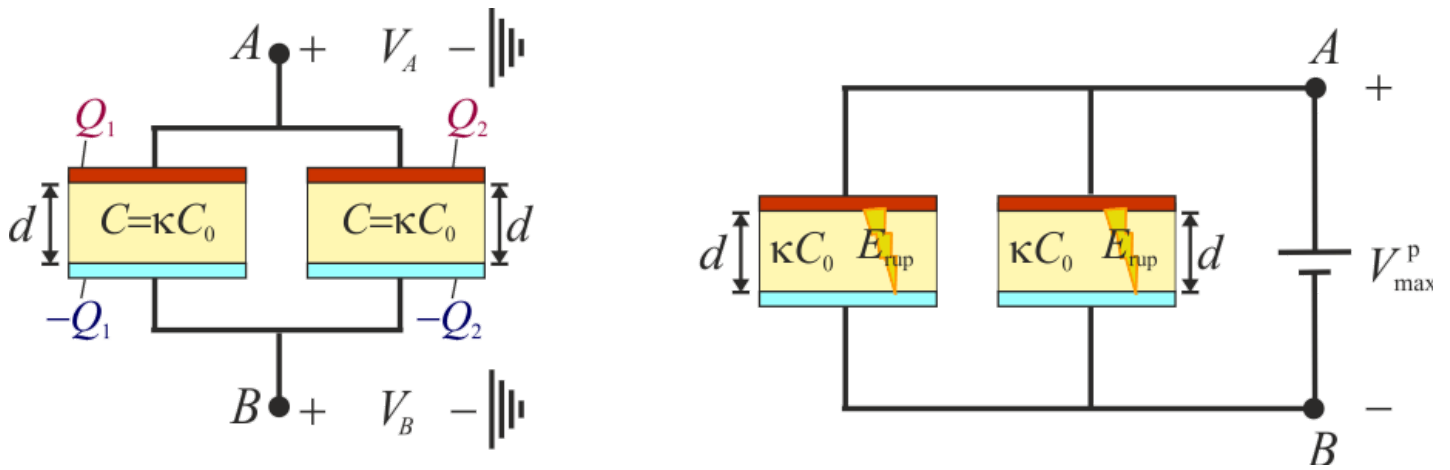
2.1 Asociación en paralelo

En este caso, ambos condensadores estarán sometidos a idéntica diferencia de potencial $\Delta V = V_A - V_B$ y, al ser igual capacidad eléctrica, almacenarán la misma cantidad de carga en los conductores equipotenciales de uno y otro condensador. Este resultado permite determinar la relación entre la energía electrostática almacenada en la asociación en paralelo, U_e^p , y la diferencia de potencial entre los conductores equipotenciales:

$$Q_1 = C(V_A - V_B) = Q_2 \quad \rightarrow \quad U_e^p = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2)(V_A - V_B) = C(V_A - V_B)^2$$

Tenemos ahora en cuenta que la diferencia de potencial aplicable entre los conductores equipotenciales no puede ser cualquiera, pues estará limitada por el valor V_{max}^p que produciría la ruptura dieléctrica. Obsérvese que, al ser los condensadores idénticos y estar conectados en paralelo, dicha ruptura se produciría simultáneamente (al menos en teoría). Teniendo en cuenta que el campo eléctrico en el interior de un condensador plano paralelo es uniforme y perpendicular a las superficies conductoras, se tendrá:

$$V_A - V_B = \int_{A(diel)}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{E}| d < E_{rup} d = V_{max}^p \quad \Rightarrow \quad U_e^p < C (V_{max}^p)^2 = C d^2 E_{rup}^2 = U_e^p|_{max}$$



2.2 Asociación en serie

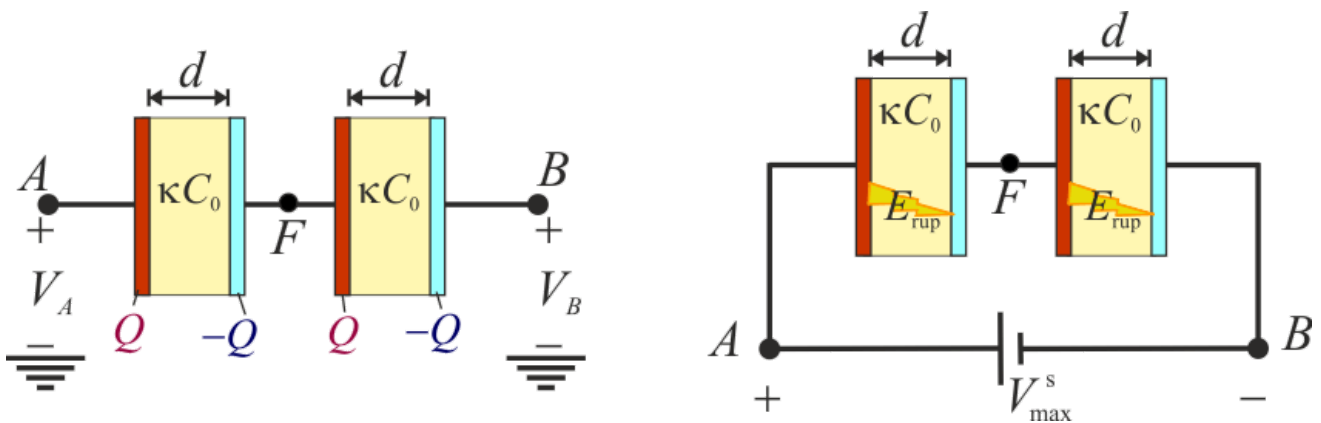
En este tipo de asociación, el conductor equipotencial que se forma al conectar los dos condensadores ha de estar aislado y descargado, de manera que las cargas en los conductores que se encuentran a distinto potencial, han de tener valores opuestos, $+Q$ y $-Q$. Y como los dos condensadores son idénticos, las diferencias de potencial en los condensadores también será la misma; en consecuencia, estas diferencias de potencial serán igual a la mitad de diferencial de potencial total en la asociación. Se tendrá, por tanto:

$$\frac{Q}{C} = V_A - V_F = V_F - V_B = \frac{V_A - V_B}{2} \quad \rightarrow \quad U_e^s = \frac{1}{2} [Q(V_A - V_F) + Q(V_F - V_B)] = \frac{C}{4} (V_A - V_B)^2$$

donde U_e^s es la energía electrostática almacenada en la asociación en serie, en términos de la capacidad C de cada uno de los condensadores idénticos, y de la diferencial de potencial a la que se halla sometida la asociación. Como puede comprobarse, para la misma diferencial de potencial $\Delta V = V_A - V_B$, esta asociación almacenaría la cuarta parte de la asociación en paralelo. Sin embargo, el valor máximo de energía almacenable está determinado por el de la máxima diferencial de potencial aplicable al sistema V_{\max}^s sin que se llegue a la ruptura dieléctrica en los condensadores; es decir, en nuestro caso de condensadores idénticos conectados en serie:

$$V_A - V_B = \int_{A(\text{diel})}^F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{F(\text{diel})}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2|\mathbf{E}|d < 2E_{\text{rup}}d = V_{\max}^s \quad \Rightarrow$$

$$U_e^s < \frac{C}{4} (V_{\max}^s)^2 = \frac{C}{4} (2dE_{\text{rup}})^2 = U_e^s|_{\max}$$



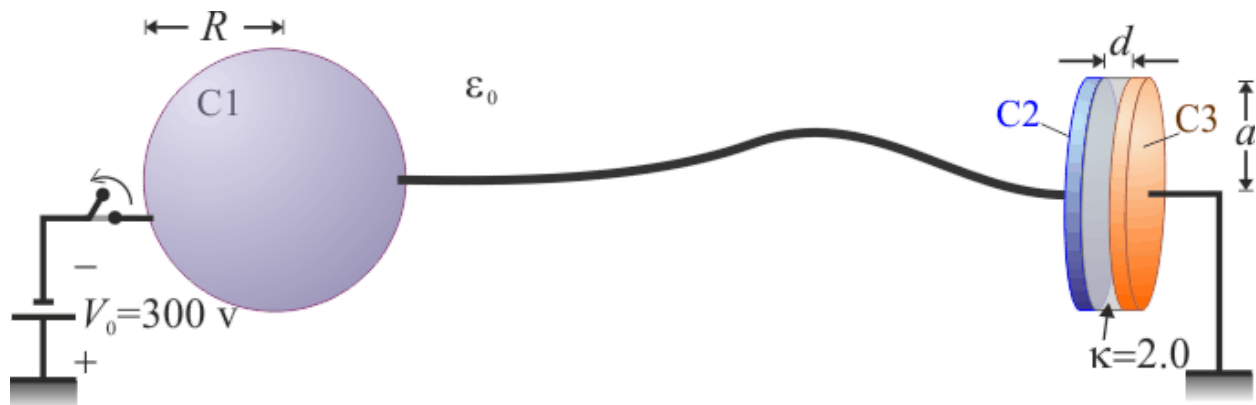
En resumen, la energía electrostática máxima que se puede almacenar en una asociación de dos condensadores planos paralelos idénticos de sección S , rellenos de un dieléctrico de constante

dieléctrica κ , espesor d , y con un valor de campo de ruptura E_{rup} , es independiente del tipo de asociación y vale:

$$U_e^{\text{P}}|_{\text{max}} = U_e^{\text{S}}|_{\text{max}} = C d^2 E_{\text{rup}}^2 = \kappa \varepsilon_0 S d E_{\text{rup}}^2$$

1 Enunciado

El sistema de la figura está formado por una esfera conductora "C1" cuya capacidad eléctrica en el vacío es $C_e = 10 \text{ pF}$, y por dos discos conductores idénticos, "C2" y "C3", ambos de radio $a = 36 \text{ mm}$, separados por una lámina de papel parafinado cuyos respectivos valores de constante dieléctrica y campo de ruptura son $\kappa = 2.0$ y $E_{\text{rup}}^{\kappa} = 30 \text{ kV/mm}$. Los discos y el papel forman un condensador plano paralelo relleno de dieléctrico, de capacidad $C_p = 360 \text{ pF}$. El disco conductor "C3" permanece en todo momento conectado a tierra, por lo que el valor del potencial en todos los puntos de dicho disco es siempre $V_3 = 0 \text{ V}$. El disco "C2" está conectado mediante un cable a la esfera "C1", de manera que ambos conductores son siempre equipotenciales. Además, el cable es lo suficientemente largo y delgado como para que las distribuciones de carga en la esfera y el condensador no se vean mutuamente afectadas.



1. La esfera "C1" se conecta al electrodo negativo de un generador ideal de fuerza electromotriz $V_0 = 300 \text{ V}$, cuyo electrodo positivo está conectado a tierra. ¿Qué cantidad de carga $Q_i = Q|_{C_i}$ se distribuye en cada uno de los conductores?
2. En un determinado instante se desconecta la esfera "C1" del generador, pero manteniendo la conexión a tierra del disco "C3". ¿Qué cantidad de energía eléctrica U_e se almacena en el sistema tras la desconexión?
3. Tras desconectar la esfera del generador, se quiere retirar la lámina de papel parafinado del condensador, quedando éste relleno de aire. ¿Cómo cambian los valores de las magnitudes eléctricas en el sistema tras retirar la lámina de dieléctrico?
4. ¿Qué condición debe verificar la fuerza electromotriz del generador, V_0 , para que pueda retirarse la lámina dieléctrica sin que se produzca ruptura dieléctrica? (Campo de ruptura del aire: $E_{\text{rup}}^0 = 3 \text{ kV/mm}$).

2 Solución

2.1 Carga eléctrica en los conductores

Las cantidades de carga eléctrica en los diferentes conductores del sistema estarán determinadas por las capacidades eléctricas de la esfera y del condensador plano paralelo que forman los dos discos, y por el valor del potencial electrostático, $V_i = V|_{C_i}$ en cada uno de ellos. El disco "C3" se encuentra a potencial nulo en todo momento,

mientras que el valor del potencial de la esfera "C1" y el disco "C2" estará fijado por estar conectados al electrodo negativo del generador:

$$V_1 = V_2 = -V_0 = -300 \text{ V}; \quad V_3 = 0 \text{ V}$$

Como el cable que une los conductores "C1" y "C2" es lo suficientemente largo como para que las cargas eléctricas en estos conductores no se afecten mutuamente, podemos considerar que la carga en el conductor esférico se distribuye uniformemente en su superficie, de manera que:

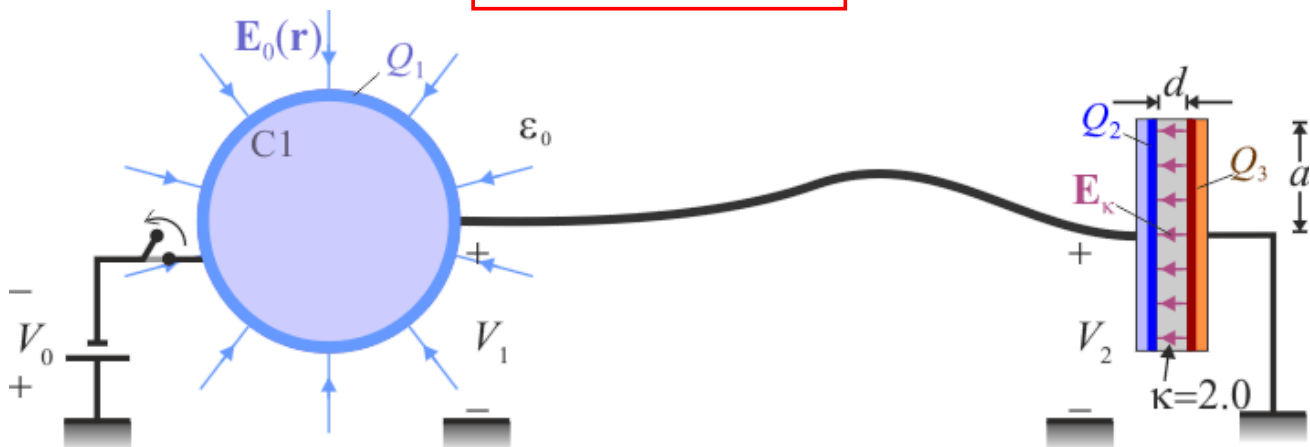
$$C_e = 10 \text{ pF} = \frac{Q}{V} \Big|_{\partial C_1} = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow \boxed{Q_1 = -C_e V_0 = -3 \text{ nC}}$$

En el enunciado se indica que los discos "C2" y "C3" forman un condensador; por tanto, cuando se encuentran a distinto potencial --como es el caso--, las respectivas superficies enfrentadas de los conductores están en influencia total, almacenan cantidades opuestas de carga. Además, si se trata de un condensador plano paralelo, estas cargas se distribuyen de manera prácticamente uniforme en dichas superficies, y en el dieléctrico que las separa se localiza un campo eléctrico uniforme (igual módulo, dirección y sentido en todos los puntos), que es perpendicular a ambas superficies cargadas.

La relación entre la carga eléctrica en una de las superficies y su diferencia de potencial con la otra está determinada por la capacidad eléctrica del condensador, de manera que:

$$C_p = 360 \text{ pF} = \frac{Q_2}{V_2 - V_3} = \frac{Q_3}{V_3 - V_2} \Rightarrow \boxed{Q_2 = -C_p V_0 = -108 \text{ nC};}$$

$$\boxed{Q_3 = C_p V_0 = 108 \text{ nC}}$$



2.2 Energía del sistema tras la desconexión

La [energía electrostática de un sistema de conductores](#) es igual a la mitad del producto de las cargas distribuidas en las superficies de los conductores multiplicadas por el potencial al que se encuentran éstos.

En este caso se indica que, tras cargar el sistema de conductores conectando el "C1" al generador, se procede a desconectarlo. Obsérvese que el conductor formado por la conexión de "C1" y "C2" queda aislado y, por tanto, con las mismas cargas Q_1 y Q_2 que adquirió con la conexión. El conductor "C3" permanece conectado a tierra y, en

consecuencia, a potencial nulo. Pero como su cara interna se encuentra en influencia total con la del disco "C2", debe mantener la cantidad de carga Q_3 , opuesta a Q_2 .

Asimismo, como las capacidades eléctricas de conductor esférico y condensador plano no han cambiado (pues la geometría no se ha modificado), los valores de los potenciales V_1 y V_2 seguirán siendo iguales a $-V_0$. Por tanto, tras la desconexión se tendrá:

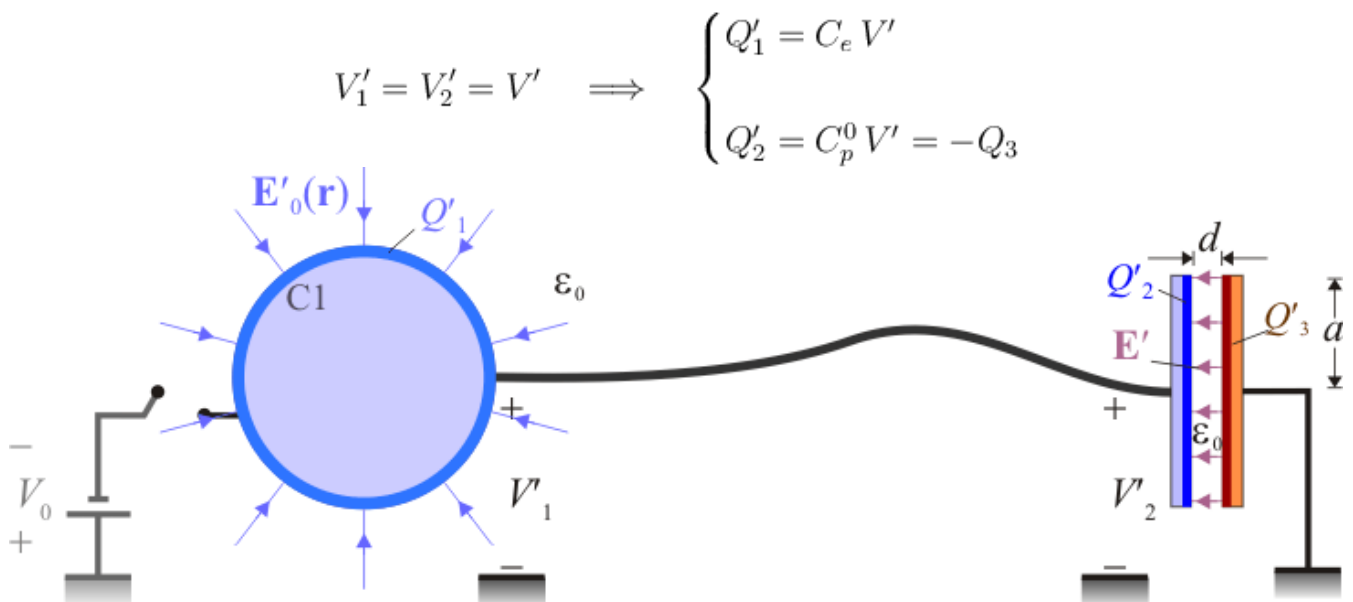
$$U_e = \frac{1}{2} \{Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3\} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} (C_e + C_p) (V_0)^2 \approx 16.7 \mu\text{J}$$

2.3 Consecuencias de la retirada del dieléctrico

Tras cargar eléctricamente el sistema, se proceder a retirar la lámina de dieléctrico del condensador. Esto producirá un cambio en la capacidad eléctrica del condensador plano paralelo y, en consecuencia, una nueva relación entre los valores de la carga eléctrica en los conductores "C2" y "C3" y el valor del potencial en "C2" (nótese que el disco "C3" se mantiene conectado a tierra y, por tanto, a potencial nulo):

$$C_p = 360 \text{ pF} \rightarrow C_p^0 = \frac{C_p}{\kappa} = 180 \text{ pF}; \quad C_p^0 = \frac{Q'_2}{V'_2 - V_3} = \frac{Q'_3}{V_3 - V'_2}$$

La capacidad eléctrica de la esfera conductora "C1" no cambia, pero como permanece conectada al disco "C2" el potencial de aquella cambiará si lo hace el de éste y, en consecuencia también se modificará la cantidad de carga distribuida en la superficie esférica:



El valor V' se determina con la condición de que, una vez desconectados del generador, los conductores "C1" y "C2" constituyen un único conductor aislado, donde se mantiene la carga de -111 nC :

$$Q'_1 + Q'_2 = (C_e + C_p^0) V' = -(C_e + C_p) V_0 = Q_1 + Q_2 \quad \Rightarrow$$

$$V' = -\frac{370}{190} V_0 \approx -584 \text{ V}$$

Es decir, el potencial electrostático en los conductores "C1" y "C2" se hace más negativo. Esto tiene como consecuencia la variación de las cantidades de carga distribuidas en los conductores:

$$Q'_1 \approx -6 \text{ nC} < Q_1;$$

$$Q'_2 \approx -105 \text{ nC} > Q_2;$$

$$Q'_3 \approx 105 \text{ nC} < Q_3$$

Disminuye la cantidad de carga en los conductores "C3" y "C1" (en éste se hace más negativa), y aumenta la carga en "C2" (se hace menos negativa).

2.4 Ruptura dieléctrica en el sistema

Acabamos de obtener en el apartado anterior que el potencial en los conductores "C1" y "C2" casi duplica su valor (en términos absolutos), por lo que resulta de interés analizar la posibilidad de la ruptura en alguno de los medios dieléctricos del sistema. Analicemos dicha posibilidad tanto antes como después de retirar la lámina del condensador.

2.4.1 Antes de retirar el dieléctrico

En el entorno del conductor esférico "C1", el módulo del campo eléctrico alcanza su valor máximo en los puntos de la superficie conductora " ∂C_1 ":

$$\forall P \in \mathbb{R}^3, \quad |\mathbf{E}_0(P)| = k_e \frac{|Q_1|}{|r|^2} \leq \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Teniendo en cuenta cómo es la capacidad eléctrica de este conductor y cómo ésta determinar la relación entre la carga que almacena en su superficie y la diferencia de potencial a que se encuentra, podemos determinar el valor máximo del campo eléctrico en torno a la esfera "C1":

$$C_e = 4\pi\epsilon_0 R = Q_1/V_1 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{E}_0(P)| \leq \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{V_0}{k_e C_e} \approx 3.3 \text{ V/mm} \ll E_{\text{rup}}^0 = 3 \text{ kV/mm}$$

Como puede comprobarse, cuando la esfera se conecta a la fuente de 300 V dicho valor máximo es considerablemente inferior al campo de ruptura del aire, por lo que en esta región no se verifica ruptura dieléctrica.

En el interior del dieléctrico que rellena el condensador plano paralelo se localiza un campo eléctrico uniforme cuyo módulo es igual a la diferencia de potencial entre los conductores, dividido por la distancia d que los separa. Y aunque el valor de este parámetro geométrico no se indica en el enunciado, puede determinarse a partir de la capacidad eléctrica del condensador. Como las superficies conductoras en influencia total son discos de radio $a = 36 \text{ mm}$ y el papel parafinado tiene una constante dieléctrica $\kappa = 2$, se tendrá que:

$$C_p = \kappa \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} = 360 \text{ pF} \quad \implies \quad d = 0.2 \text{ mm}$$

Por tanto, al conectar el sistema al generador y antes de retirar la lámina de papel parafinado, la intensidad del campo eléctrico entre las placas del condensador es...

$$|\mathbf{E}_\kappa| = \frac{V_3 - V_2}{d} = \frac{V_0}{d} = 1.5 \text{ kV/mm} \ll E_{\text{rup}}^\kappa = 30 \text{ kV/mm}$$

... mucho menor que el campo de ruptura de dicho dieléctrico. Puede comprobarse que, para que se produjese tal ruptura, sería necesario que el valor V_0 del generador superase los 6 kV.

2.4.2 Tras retirar el dieléctrico

El módulo del campo eléctrico entre los discos conductores al retirar el dieléctrico es:

$$|\mathbf{E}'| = \frac{|V'_2 - V_3|}{d} = \frac{|V'|}{d}$$

En consecuencia, la condición para que no se produzca la ruptura dieléctrica entre dichos conductores es que la intensidad de este campo uniforme no supere el valor de ruptura para el aire. Por tanto,

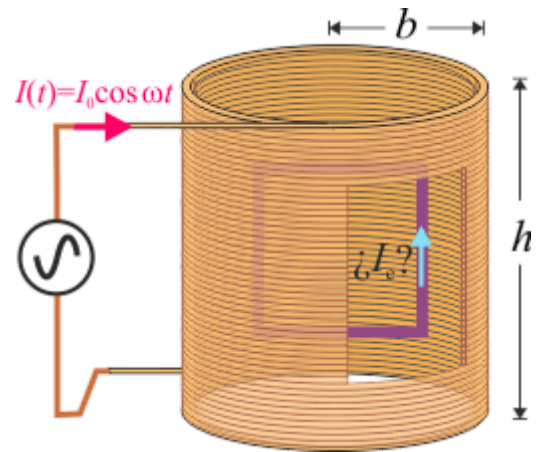
$$|V'| = \frac{370}{190} V_0 \leq E_{\text{rup}}^0 d = 600 \text{ V} \quad \iff \quad V_0 \leq \frac{19}{37} E_{\text{rup}}^0 d = 308 \text{ V} = V_0^{\text{max}}$$

Obsérvese que para este valor de fuerza electromotriz del generador, el potencial de los conductores "C1" y "C2" sería $V'_{\text{max}} \approx -600 \text{ V}$. Así, la intensidad del campo eléctrico en el entorno de la esfera conductora "C1" se mantendría muy por debajo del valor de ruptura dieléctrica del aire:

$$|\mathbf{E}'_0(P)| \leq \frac{V'_{\text{max}}}{k_e C_e} \approx 6.7 \text{ V/mm} \ll E_{\text{rup}}^0 = 3 \text{ kV/mm}$$

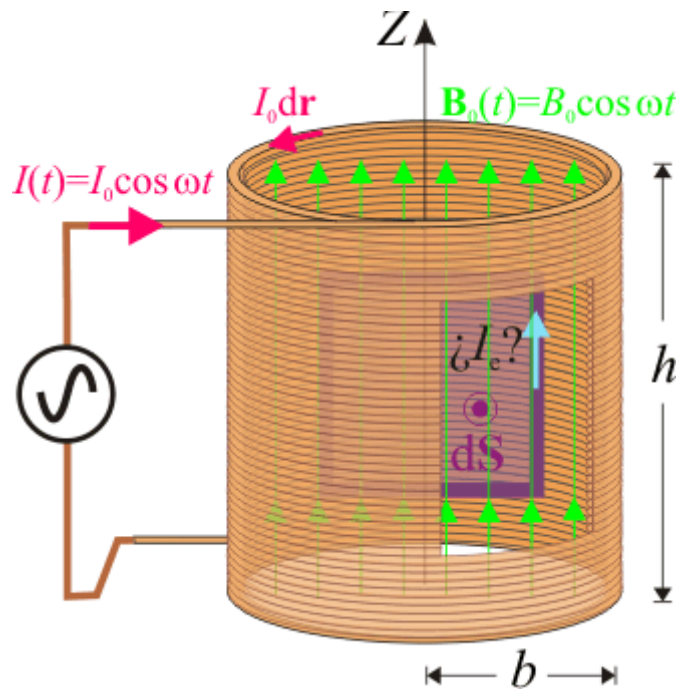
1 Enunciado

Un solenoide constituido por N espiras compactas paralelas, con forma de cilindro recto de longitud h mucho mayor que su radio b , es recorrido por una corriente eléctrica de intensidad variable en el tiempo según la ley $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, siendo I_0 y ω constantes conocidas. En el interior del solenoide hay una pequeña espira cuadrada de resistencia eléctrica R , autoinducción despreciable y lado a , menor que el radio b . Esta espira está contenida en un plano perpendicular a las espiras del solenoide. ¿Cuál es el valor de la intensidad de corriente I_e que recorre la espira cuadrada?



2 Solución

Comenzamos adoptando un sistema de referencia adecuado para proceder a la descripción analítica de las magnitudes vectoriales. Tomando el eje de la bobina cilíndrica como eje OZ de dicho sistema, se tendrá que el campo magnético producido por la intensidad $I(t)$ que recorre el solenoide en sentido antihorario, es:



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; t) \simeq \begin{cases} \frac{\mu_0 N}{h} I(t) \mathbf{k} = \mathbf{B}_0(t); & \text{en el interior de la bobina} \\ \mathbf{0}; & \text{en el exterior de la bobina} \end{cases}$$

donde se ha aplicado la aproximación de bobina larga. Realmente, esta aproximación no va a suponer una pérdida de generalidad en los resultados que se obtengan para la fuerza electromotriz inducida en la espira, pues asumiremos que ésta se encuentra en el interior de la bobina, lejos de sus extremos.

En la espira cuadrada no hay conectado ningún generador, por tanto, la fuerza electromotriz responsable de que exista una corriente eléctrica en la espira $\partial\Sigma$ es la inducida por la variación del flujo magnético a través de ella. Si la espira tiene una resistencia eléctrica R y autoinducción despreciable, la intensidad de la corriente inducida es:

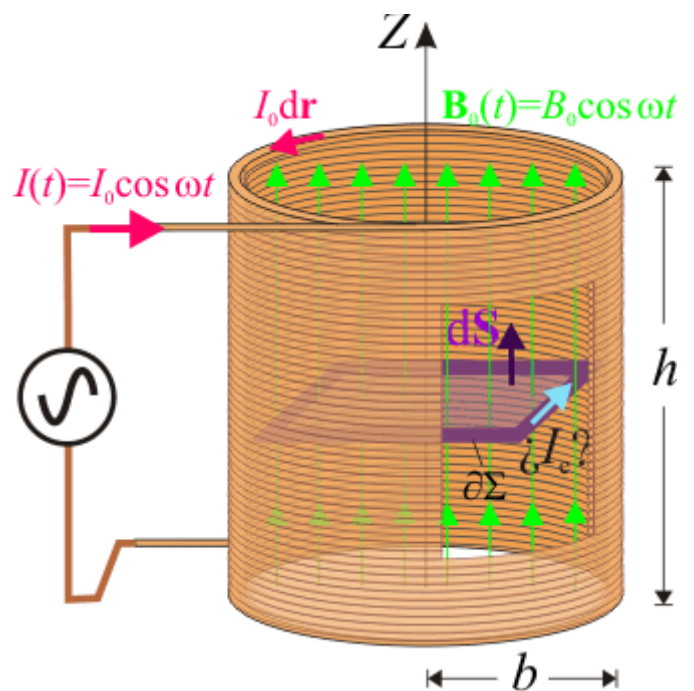
$$I_e(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{R} \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\Sigma}; \quad \text{con} \quad \Phi_m|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B}_0(t) \cdot d\mathbf{S}$$

La superficie de integración Σ es cualquiera delimitada por la espira cuadrada $\partial\Sigma$; por ejemplo, el cuadrado de lado a contenido en el plano de la espira. Según se indica en el enunciado, dicho plano es perpendicular a los de las N espiras que constituyen la bobina o solenoide. En consecuencia, se tendrá que,

$$d\mathbf{S}|_{\Sigma} \perp \mathbf{k}, \mathbf{B}_0(t) \implies \Phi_m|_{\Sigma} = 0 \implies I_e(t) = 0, \quad \forall t$$

3 Anexo

Aunque no es lo que se pide en el enunciado, calculemos el valor de la intensidad de la corriente inducida en la espira $\partial\Sigma$ si se coloca contenida en un plano paralelo a los de sus espiras. En esta situación, se tendría que $d\mathbf{S} = dS \mathbf{k}$; además, si la espira está en el interior de la bobina, lejos de los extremos, en todos los puntos de la superficie Σ habría el mismo campo magnético $\mathbf{B}_0(t)$; entonces...



$$\Phi_m(t)|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B}_0(t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 N}{h} I(t) \int_{\Sigma} dS = \frac{\mu_0 N a^2}{h} I_0 \cos \omega t$$

Aplicando la ley de inducción electromagnética, se obtiene que la intensidad de la corriente inducida en la espira sería:

$$I_e(t) = -\frac{1}{R} \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\Sigma} = \frac{\mu_0 N a^2 \omega}{R h} I_0 \text{sen } \omega t$$

1 Enunciado

Dos cargas puntuales iguales q_1 y q_2 se mueven con la misma celeridad v de forma que en un instante se encuentran situadas en $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{u}_x$, respectivamente.

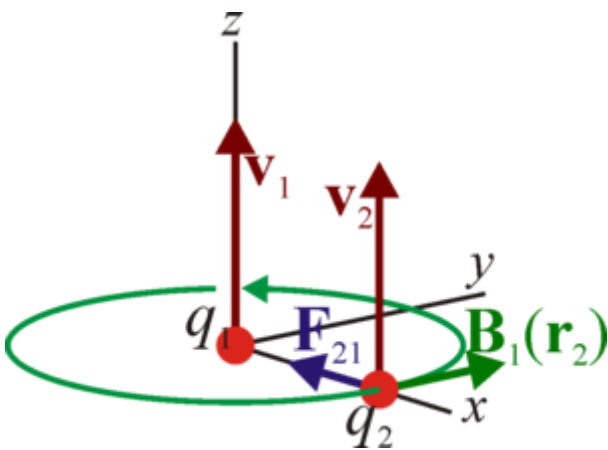
Si las dos cargas se mueven con velocidades pequeñas $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_z$, calcule el valor aproximado de la fuerza eléctrica y de la fuerza magnética que ejerce cada carga sobre la otra. ¿Cuál es la proporción entre estas dos fuerzas?

¿Cómo cambian estas fuerzas si se cambia el signo de una de las cargas, el sentido de una de las velocidades, o ambas cosas a la vez?

Calcule el valor de estas fuerzas si $\mathbf{v}_1 = v\mathbf{u}_z$, $\mathbf{v}_2 = v\mathbf{u}_x$. ¿Se verifica la tercera ley de Newton?

2 Fuerza magnética

2.1 Directamente



Podemos hallar la fuerza magnética entre las dos cargas empleando la [Ley de Biot y Savart](#) para cargas puntuales. La fuerza que la carga 1 produce sobre la 2 es

$$\mathbf{F}_{m21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

donde en nuestro caso tenemos, tomando como Z el que pasa por la carga 1 y paralelo a su velocidad, y como eje X

el que va de la carga 1 a la 2,

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = a\mathbf{u}_x \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = a \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = v\mathbf{u}_z$$

Sustituyendo nos queda

$$\mathbf{F}_{m21} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi a^2} \mathbf{u}_z \times (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x) = -\frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi a^2} \mathbf{u}_x$$

donde hemos usado los [productos entre los vectores de la base](#). Esta fuerza sobre la carga 2 va en la dirección de la 1, es decir, es atractiva.

Para hallar la fuerza que la carga 2 produce sobre la 1, lo único que cambia es que el vector de posición relativo es ahora $-a\mathbf{u}_x$, por lo que resulta una fuerza

$$\mathbf{F}_{m12} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi a^2} \mathbf{u}_x = -\mathbf{F}_{21}$$

Esta fuerza es también atractiva, cumpliéndose además la tercera ley de Newton.

Generalizando este resultado tenemos que las fuerzas entre corrientes paralelas y en el mismo sentido, son atractivas.

2.2 Empleando el campo magnético

Podemos escribir el resultado de una forma más clara, desglosando el cálculo con ayuda del campo magnético como intermediario. Consideramos que la carga 1 produce un campo magnético, que es percibido por la carga 2.

El campo magnético de la carga 1 en todo el espacio es

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}$$

y en la posición de la 2ª es

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 q_1 v_1}{4\pi a^2} \mathbf{u}_y$$

La fuerza magnética sobre la carga 2, de acuerdo con la [ley de Lorentz](#)

$$\mathbf{F}_{m2} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)$$

que, sustituyendo el campo anterior nos da lo que ya conocemos

$$\mathbf{F}_{m21} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi a^2} \mathbf{u}_x$$

3 Comparación con la fuerza eléctrica

Podemos comparar la magnitud de esta fuerza con la fuerza eléctrica entre ambas cargas. Si la velocidad de las cargas es pequeña, podemos aproximar la fuerza mediante la ley de Coulomb:

$$\mathbf{F}_{e21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 a^2} \mathbf{u}_x$$

La proporción entre ambas fuerzas es

$$\frac{F_m}{F_e} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

donde $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ es la velocidad de la luz. Por ello, normalmente

$$F_m \ll F_e$$

Las fuerzas magnéticas sólo son apreciables porque la materia es neutra. En la interacción entre dos hilos conductores de corriente, las fuerzas eléctricas entre iones y electrones se cancelan (y $F_e \simeq 0$). Para la fuerza magnética sólo cuentan los electrones móviles, y $F_m \neq 0$.

4 Cambio de signo

Si cambiamos el signo a una de las cargas la fuerza magnética cambia de signo, pasando a ser repulsiva. Lo mismo ocurre si cambiamos el sentido a una de las velocidades. Si cambiamos el signo de una carga y de una velocidad, la fuerza vuelve a ser atractiva.

Teniendo en cuenta que la densidad de corriente va como el producto de la carga por la velocidad, este resultado predice que corrientes paralelas ($\uparrow\uparrow$) se atraen, mientras que las antiparalelas ($\uparrow\downarrow$) se repelen.

5 Velocidades perpendiculares

5.1 Directamente

Aplicando de nuevo la expresión de la fuerza entre dos cargas en movimiento

$$\mathbf{F}_{m21} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{4\pi |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

donde tenemos ahora, al igual que antes

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = a\mathbf{u}_x \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = a \quad \mathbf{v}_1 = v\mathbf{u}_z$$

siendo el único cambio

$$\mathbf{v}_2 = v\mathbf{u}_x$$

que al sustituir nos da

$$\mathbf{F}_{m21} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi a^2} \mathbf{u}_x \times (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi a^2} \mathbf{u}_z$$

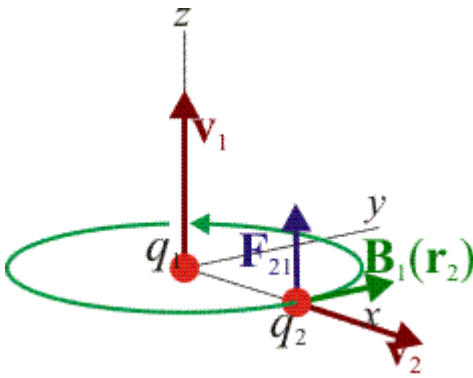
Si hallamos ahora la fuerza que la 2 produce sobre la 1

$$\mathbf{F}_{m12} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi a^2} \mathbf{u}_z \times (\mathbf{u}_x \times (-\mathbf{u}_x)) = \mathbf{0}$$

Obtenemos que la fuerza que la 1 produce sobre la 2 es no nula, pero la que la 2 produce sobre la 1 sí lo es, es decir, que *no se cumple la 3ª ley de Newton*.

$$\mathbf{F}_{m21} \neq \mathbf{F}_{m12}$$

5.2 Empleando el campo magnético



Lógicamente, obtenemos el mismo resultado empleando el campo magnético como intermediario, pero con una interpretación diferente.

Para la fuerza que la 1 produce sobre la 2,

$$\mathbf{F}_{m21} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)$$

el campo magnético de la 1 en la posición de la 2 es el mismo que en el caso de las velocidades paralelas. Simplemente cambiamos \mathbf{v}_2 por una perpendicular, resultando una fuerza perpendicular a la que obtuvimos en el primer apartado.

$$\mathbf{F}_{m21} = q_2 v \mathbf{u}_x \times \left(\frac{\mu_0 q_1 v}{4\pi a^2} \mathbf{u}_y \right) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2 \mathbf{u}_z}{4\pi a^2}$$

Para la fuerza que la 2 produce sobre la 1, consideramos el [campo producido en todo el espacio por una carga en movimiento](#)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q v \rho \mathbf{u}_\phi}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

que nos dice que el campo magnético de una carga es nulo en todos los puntos del eje del movimiento (salvo en la propia carga). Pero la carga q_1 se encuentra situada justamente sobre este eje, por lo que

$$\mathbf{F}_{m12} = q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

En esta descripción de la interacción, la anulación de la fuerza no se debe a que las velocidades sean paralelas o perpendiculares, sino a que el campo de una de las cargas se anula en la posición de la otra, no ocurriendo lo recíproco.

Fuerza entre un hilo y una espira

De Laplace

1 Enunciado

Una espira rectangular de lados a y b , recorrida por una corriente I_1 , es coplanaria con un conductor rectilíneo, por el que circula una corriente I_2 . La distancia del centro de la espira al hilo es d . Halle la fuerza que aparece entre el hilo y la espira.

2 Solución

Aunque la expresión para la fuerza entre elementos de corriente no es simétrica en la forma en la que aparecen los dos elementos, sí lo es la expresión final para fuerzas entre corrientes cerradas o que se vayan al infinito. Por ello nos basta con hallar la fuerza que el hilo produce sobre la espira. La que la espira produce sobre el hilo será igual y de sentido contrario.

Se cumple igualmente que la fuerza neta que una espira produce sobre sí misma es nula.

La fuerza producida sobre una corriente por un campo magnético viene dada por la expresión

$$\mathbf{F} = I_1 \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

En este caso $d\mathbf{r}$ es el correspondiente a un elemento de espira. \mathbf{B} es el producido por el hilo.

A la hora de hallar la fuerza tenemos que suponer que $d > (a/2)$, con lo que toda la espira queda al mismo lado del hilo. En caso contrario tendríamos que la fuerza se hace infinita, ya que habría puntos de la espira que percibirían un campo infinito. Esto conduciría a una integral impropia divergente.

Situaremos la espira en un plano XZ , estando el hilo situado sobre el eje z . El campo magnético creado por el hilo, en este plano, vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{u}_y$$

Podemos hallar la fuerza sumando la fuerza sobre cada una de las varillas.

Para la más cercana tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \int_0^b I_1 dz \mathbf{u}_z \times \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d - a/2)} \mathbf{u}_y \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d - a/2)} \mathbf{u}_x$$

Análogamente, para la mas alejada resulta

$$\mathbf{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d + a/2)} \mathbf{u}_x$$

Por otro lado, las fuerzas sobre las varillas horizontales son iguales y de sentidos opuestos

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_4$$

Estas fuerzas contribuirían si deseáramos calcular la tensión a que está sometida cada varilla, pero admitimos que ésta se ve compensada por la rigidez del material

Todo esto da una fuerza total

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi(d^2 - a^2/4)} \mathbf{u}_x$$

Obsérvese que esta fuerza no es debida tanto a la presencia del campo magnético como al hecho de que este no es uniforme. Si \mathbf{B} hubiera tenido un valor uniforme, entonces

$$\mathbf{F} = I_1 \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I_1 \left(\oint d\mathbf{r} \right) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

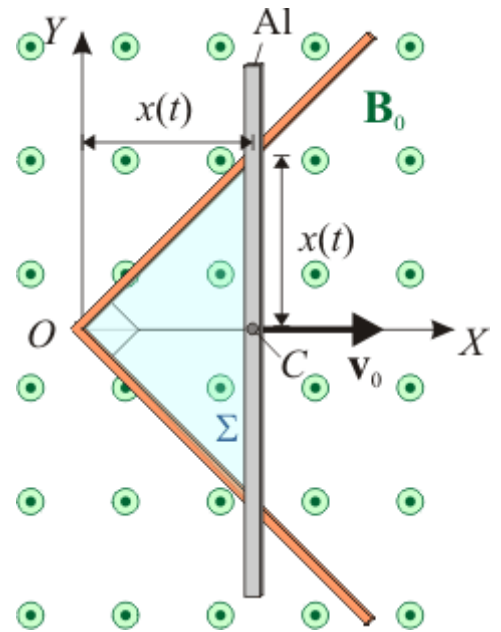
Como caso particular podemos ver que ocurre en el límite $I_2 \rightarrow \infty$, $a, b \rightarrow 0$ con $I_2 ab \rightarrow m = \text{cte}$, en el cual la espira se reduce a un dipolo magnético de momento dipolar m . El valor de la fuerza queda como

$$\mathbf{F} \rightarrow \frac{\mu_0 m I_1}{2\pi d^2} \mathbf{u}_x$$

Este valor coincide con el que obtiene a partir de la expresión

1 Enunciado

Dos conductores rectilíneos filiformes de resistencia despreciable, están contenidos en el plano OXY , conectados en ángulo recto en el punto O , y de manera que el eje OX coincide con la bisectriz del ángulo recto que forman los hilos conductores. Un barra de aluminio, de sección S y longitud a , se mueve manteniéndose siempre perpendicular al eje OX , y en contacto con los conductores filiformes. El movimiento de la barra es tal que partiendo del punto O , su centro C se desplaza con velocidad constante v_0 en el sentido positivo del eje. Todo el sistema está sometido a un campo magnético uniforme y constante, $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}$.



1. Obtenga la expresión que describe cómo varía en el tiempo el flujo magnético a través de la espira $\partial\Sigma$ formada por los conductores filiformes y la barra (considérese despreciable la autoinducción de la espira). Obtenga también la fuerza electromotriz inducida en dicho circuito.
2. Determine la expresión de la intensidad de corriente eléctrica inducida, indicando el sentido en que recorre la espira. Asimismo, obtenga las expresiones de la potencia disipada por efecto Joule en la barra, y del calor total generado desde que ésta empieza a moverse hasta que pierde el contacto con los conductores filiformes.
3. Obtenga la fuerza magnética (magnitud vectorial) que actúa sobre la corriente en la barra móvil, en función de su posición.
4. Sabiendo que la conductividad del aluminio es $\sigma_{Al} = 37.7 \times 10^6 \text{ S/m}$, calcule el valor de la intensidad de corriente, el calor generado por efecto Joule en la barra y el valor máximo de la fuerza magnética que actúa sobre ella, para el caso: $B_0 = 0.1 \text{ T}$; $v_0 = 1 \text{ cm/s}$; $S = 79.6 \text{ mm}^2$; $a = 1 \text{ m}$.

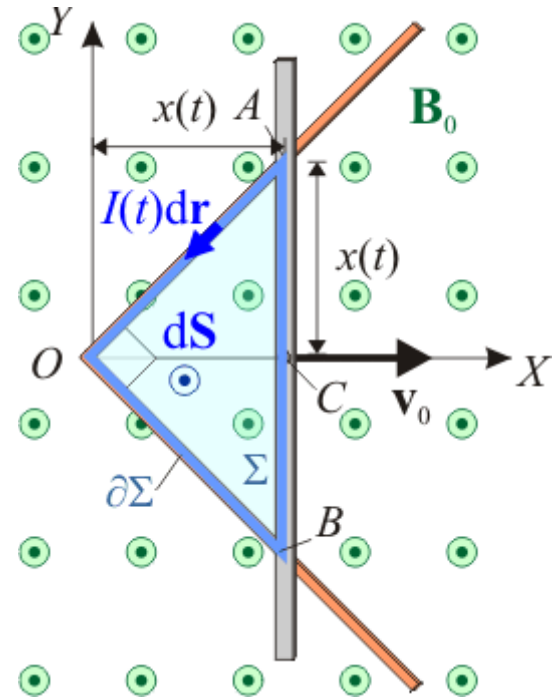
2 Solución

2.1 Flujo magnético y fuerza electromotriz inducida

2.1.1 Flujo magnético a través de la espira

La barra de aluminio y la escuadra de conductores filiformes forman una espira triangular $\partial\Sigma$, contenida en todo instante en el plano OXY , y cuyos vértices son el vértice O de la escuadra y los puntos A y B donde se verifica el contacto de

ésta con la barra móvil. Puesto que la barra se desplaza con velocidad constante respecto de la escuadra, la superficie delimitada por la espira varía en el tiempo, $\Sigma(t)$. Consideremos un instante arbitrario, t , en el cuál la barra se encuentra a una distancia $x(t)$ del vértice O , y calculemos el flujo del campo magnético uniforme \mathbf{B}_0 a través de la superficie $\Sigma(t)$, en el sentido positivo del eje OZ . Aunque el campo es uniforme y, por tanto, de módulo constante, este flujo magnético es variable en el tiempo al serlo la área $S_\Sigma(t)$ de la superficie delimitada por la espira:



$$\left. \begin{array}{l} d\mathbf{S} = dS \mathbf{k} \\ \mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k} \end{array} \right\} \longrightarrow \Phi_m^0 \Big|_{\Sigma(t)} = \int_{\Sigma(t)} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = B_0 \int_{\Sigma(t)} dS = B_0 S_\Sigma(t)$$

El valor de dicho área depende de la distancia $x(t)$ de la barra al punto O : en todo instante, la espira $\partial\Sigma$ tiene la forma de un triángulo isósceles, cuyas altura y base miden $x(t)$ y $2x(t)$, respectivamente, ya que el ángulo en el vértice O es $\pi/4$. Por tanto, el flujo magnético instantáneo del campo \mathbf{B}_0 a través de la espira $\partial\Sigma$ (medido en el sentido positivo del eje OZ), es:

$$\Phi_m^0 \Big|_{\Sigma(t)} = B_0 \frac{1}{2} x(t) [2x(t)] = B_0 x^2(t) = \Phi_0(t)$$

En virtud de la ley de Faraday, este flujo variable determinará la existencia de una fuerza electromotriz inducida \mathcal{E}_{ind} en la espira $\partial\Sigma$. Como veremos con más detalle en el siguiente apartado, la espira constituye un circuito cerrado sin generadores y con resistencia eléctrica $R_{\partial\Sigma}$, por lo que se inducirá una corriente eléctrica de intensidad:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R_{\partial\Sigma}}$$

La ley de Biot y Savart establece que dicha corriente producirá un campo magnético "inducido" $\mathbf{B}_{\text{ind}}(\mathbf{r}; t)$, que también contribuiría al flujo total de campo magnético a través de la superficie Σ delimitada por la espira:

$$\Phi_m \Big|_{\Sigma(t)} = \int_{\Sigma(t)} [\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{ind}}] \cdot d\mathbf{S} = \Phi_0(t) + L(t) I(t)$$

En la anterior expresión, el término correspondiente al flujo de la componente de campo inducido se ha expresado como el producto de la intensidad de corriente en la espira por la autoinducción $L(t)$ de la espira, que sería función del tiempo al tener una geometría variable. De todas formas, en el enunciado se indica explícitamente que la autoinducción de la espira va a ser despreciable, lo cual supone admitir de forma ímplicita que la intensidad del campo magnético inducido tiene un valor poco significativo frente a la del campo uniforme:

$$L(t) \approx 0, \quad \forall t \quad \longleftrightarrow \quad |\mathbf{B}_{\text{ind}}| \ll |\mathbf{B}_0| \quad \Longrightarrow \quad \Phi_m \Big|_{\Sigma(t)} \approx \Phi_0(t) = B_0 x^2(t)$$

Por otra parte, la barra realiza un movimiento rectilíneo uniforme con celeridad constante v_0 , y de manera que en el instante inicial ($t = 0$), el centro de la barra se halla en el vértice O ; por tanto, la expresión horaria para el flujo magnético a través de la espira será:

$$\left. \begin{array}{l} x(t = 0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v_0, \text{ cte.} \end{array} \right\} \Longrightarrow x(t) = v_0 t \quad \Rightarrow \quad \Phi_m \Big|_{\Sigma(t)} \approx B_0 v_0^2 t^2$$

2.1.2 F.e.m. inducida

En consecuencia, la fuerza electromotriz inducida en la espira $\partial\Sigma$ debido a la variación del flujo a través de la superficie variable delimitada por aquella, $\Sigma(t)$, es:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\Sigma(t)} \approx -2 B_0 v_0^2 t = \mathcal{E}(t)$$

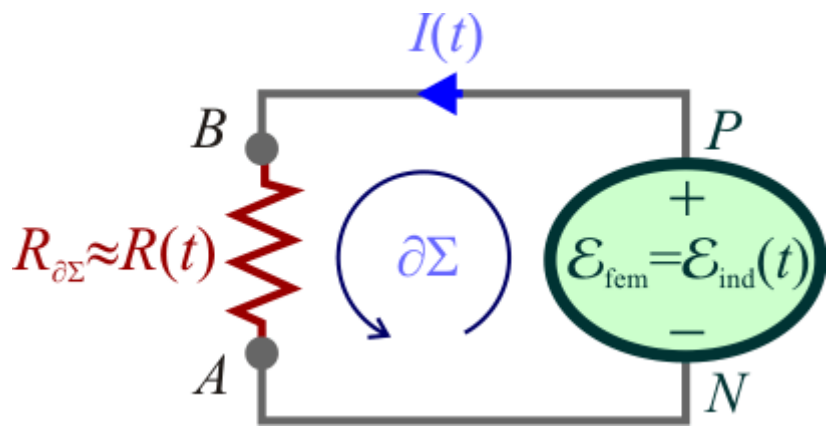
2.2 Corriente inducida

2.2.1 Intensidad de la corriente inducida en la espira

La espira $\partial\Sigma$ constituye un circuito cerrado en el cual se verificará que la suma de todas las fuerzas electromotrices es igual al producto de la intensidad de la corriente por la resistencia eléctrica de la espira:

$$\mathcal{E}_{f.e.m.} = \underbrace{\mathcal{E}_{gen}}_{=0} + \mathcal{E}_{ind} = I R_{\partial\Sigma}$$

Recuérdese que al calcular el **flujo en sentido positivo del eje OZ**, la intensidad de corriente en la espira se ha de medir considerando que dicha **corriente recorre la espira en sentido antihorario**, visto desde el semiespacio correspondiente a los valores positivos de z .



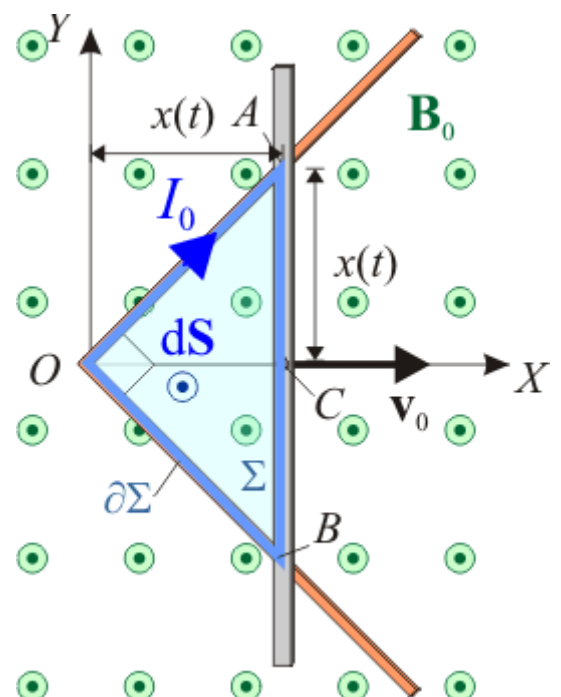
En la espira no hay generadores, por tanto la única fuente de fuerza electromotriz es la inducida por el flujo magnético variable. En cuanto a la resistencia eléctrica, en el enunciado se indica que los conductores filiformes que forman la escudera tienen resistencia eléctrica despreciable frente a la de la barra móvil de aluminio que cierra el circuito. Tampoco se hace mención a la resistencia de contacto entre la escudera y dicha barra y, por lo que consideraremos que la resistencia eléctrica de la espira se reduce a la de la barra. No obstante, hay que tener cuidado con esto pues, como se recordará, el concepto de resistencia eléctrica de un medio óhmico se define para el tubo de corriente que se forma en dicho medio. En el caso que nos ocupa, dicho tubo no se extiende a toda la barra, sino sólo al segmento de corriente comprendido entre los puntos de contacto B y A, y cuya longitud en un instante arbitrario es $l(t) = 2x(t)$. Si se tiene en cuenta que la barra es rectilínea, podemos aplicar la expresión de la resistencia eléctrica de un conductor filiforme:

$$R_{\partial\Sigma} \approx R_{AB} = \frac{V_B - V_A}{I} = \frac{l(t)}{\sigma_{Al} S} \Rightarrow$$

$$R_{\partial\Sigma} \approx \frac{2v_0 t}{\sigma_{Al} S} = R(t)$$

donde S es la sección de la barra móvil. Obsérvese que la resistencia eléctrica del segmento de conductor \overline{AB} (y por tanto la del circuito) varía con el tiempo cuando la barra se mueve.

A partir de la ecuación del circuito que inicia este apartado, se obtiene la expresión para la intensidad de la corriente inducida que recorre la espira $\partial\Sigma$:



$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R_{\partial\Sigma}} \approx \frac{\mathcal{E}(t)}{R(t)} \quad \Rightarrow \quad I(t) \approx -B_0 v_0 \sigma_{\text{Al}} S = -I_0$$

es decir, la corriente eléctrica inducida tiene intensidad constante de valor I_0 . El signo negativo indica que dicha corriente recorre la espira en sentido horario; es decir, en sentido opuesto al propuesto. Obviamente, este es un resultado coherente con la ley de Lenz: cuando la barra se desplaza en el sentido positivo del eje OX aumenta el flujo magnético del campo B_0 (al medir aquél en el sentido positivo del eje OZ); según dicha ley, la corriente inducida debe recorrer la espira en sentido horario para producir así un campo magnético inducido que, dirigido en el sentido negativo del eje OZ , se oponga al aumento del flujo magnético.

2.2.2 Potencia y energía disipada por efecto Joule

Según la ley de Joule, la potencia disipada por efecto Joule en el segmento de la barra recorrida por la corriente es...

$$\mathcal{P}_{\text{Jou}} = I^2(t) R_{\partial\Sigma} \approx I_0^2 R(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{\text{Jou}} = \frac{dW_{\text{Jou}}}{dt} \approx 2 B_0^2 v_0^3 \sigma_{\text{Al}} S t = K_0 t$$

Es decir, la potencia instantánea disipada en forma de calor es proporcional al tiempo transcurrido desde que se inicia el movimiento.

La energía disipada en el proceso completo es igual a la integral de la potencia desde el instante inicial hasta el momento t_{fin} en que la barra móvil pierde contacto con la escuadra conductora. Si la longitud de la barra tiene un valor a , dicho instante final se produce cuando:

$$2x(t_{\text{fin}}) = a \quad \Rightarrow \quad t_{\text{fin}} = \frac{a}{2v_0}$$

Por tanto, la energía disipada en forma de calor, por efecto Joule, es:

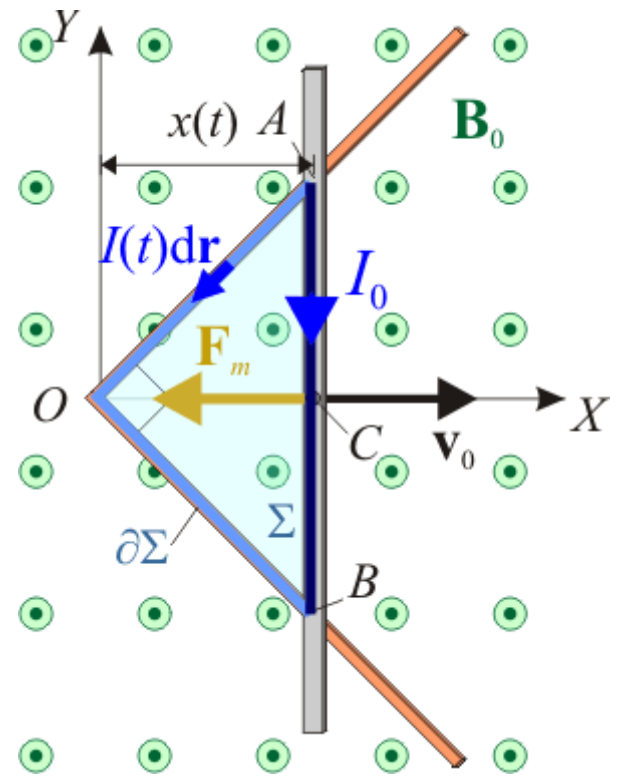
$$Q_{\text{Jou}} = \int_0^{t_{\text{fin}}} \mathcal{P}_{\text{Jou}}(t) dt \approx \frac{1}{2} K_0 t_{\text{fin}}^2 \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{Jou}} \approx \frac{1}{4} B_0^2 v_0 a^2 \sigma_{\text{Al}} S$$

2.3 Fuerza magnética sobre la barra

El campo magnético ejerce una fuerza sobre la corriente eléctrica que se establece en la espira. En particular, la fuerza sobre la barra móvil (realmente sobre el segmento de corriente que se establece entre los puntos B y A) responde a la expresión general:

$$\mathbf{F}_m]_{AB} = \int_B^A I \, d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

Nótese que en esta expresión mantenemos el sentido antihorario para el elemento de corriente. Además, la fuerza es ejercida por el campo magnético total resultante de la superposición del campo uniforme aplicado \mathbf{B}_0 con el creado por la corriente inducida. Sin embargo, como vimos en el [primer apartado](#) se puede considerar que el campo magnético inducido es despreciable frente al campo aplicado (autoinducción despreciable). Y como se trata de un campo uniforme y la intensidad de corriente es la misma en todos los puntos de la espira, se obtiene:



$$\mathbf{F}_m]_{AB} \approx I(t) \left[\int_B^A d\mathbf{r} \right] \times \mathbf{B}_0 = -I_0 \vec{BA} \times \mathbf{B}_0 \implies$$

$$\implies \mathbf{F}_m]_{AB} \approx -I_0 [2x(t) \mathbf{j}] \times (B_0 \mathbf{k}) = -2I_0 B_0 x(t) \mathbf{i}$$

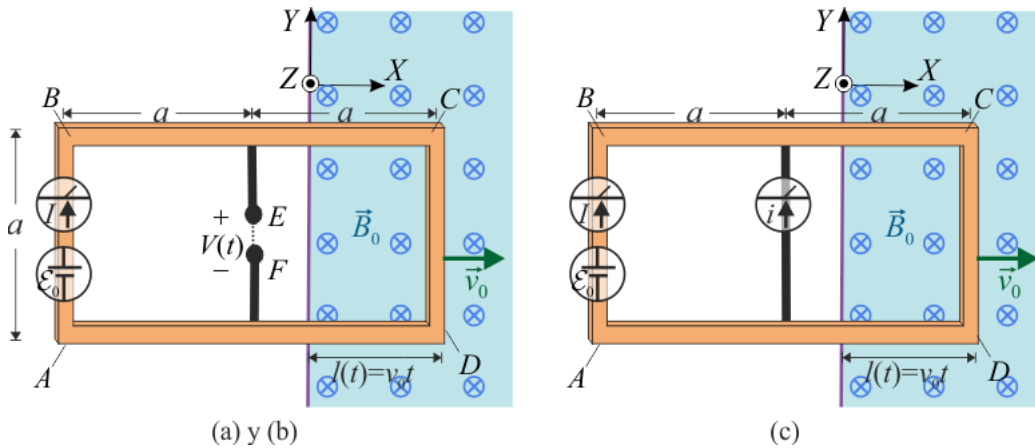
Es decir, la fuerza magnética que actúa sobre la barra móvil como consecuencia de la existencia de la corriente inducida, se opone al desplazamiento de aquélla. Es decir, se trata de otro aspecto del fenómeno en que se pone de manifiesto la ley de Lenz.

1 Enunciado

Una espira rectangular $ABCD$ está formada por cuatro conductores filiformes de igual resistividad y sección, y de longitudes a y $2a$, siendo R su resistencia eléctrica total. En el lado corto AB tiene incrustado un generador eléctrico ideal con una f.e.m. constante \mathcal{E}_0 , y con sus electrodos conectados de manera que, por sí sola, generaría una corriente eléctrica que recorrería la espira en sentido horario. Además, en los puntos medios de los lados largos, BC y DA , se conectan sendos conductores filiformes rectilíneos de resistencia nula, paralelos a los lados cortos y que terminan en los extremos E y F , muy próximos pero con una pequeña separación entre ellos, que hace que esta rama del circuito esté abierta.

La espira se encuentra siempre contenida en el plano OXY , con sus lados cortos AB y CD paralelos al eje OY , y se desplaza con velocidad constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$, con $v_0 = a/T$. Inicialmente, la espira se encuentra en una región donde no existe campo magnético, pero a partir del instante que consideramos $t = 0$, la espira penetra por su lado corto CD en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = -B_0 \vec{k}$, cuya intensidad se ajusta de manera que se cumpla $B_0 a v_0 = \mathcal{E}_0$.

- (a) Para los instantes anteriores a que la espira entre en la región de campo magnético ($t < 0$), determine el valor de la intensidad I (medida en sentido horario) de la corriente eléctrica que recorre la espira. Calcule también el valor del voltaje V entre los extremos E y F .
- (b) En los instantes de tiempo $t > 0$, ¿cómo es la señal de intensidad $I(t)$ de la corriente eléctrica que recorre la espira? ¿Y la señal de voltaje $V(t)$ entre los extremos abiertos E y F ?
- (c) Si se repite el experimento pero conectando los extremos E y F mediante un amperímetro de resistencia nula, ¿cómo sería la señal de intensidad de corriente $i(t)$ que registraría dicho amperímetro en los intervalos de tiempo $t < 0$ y $t > 0$?

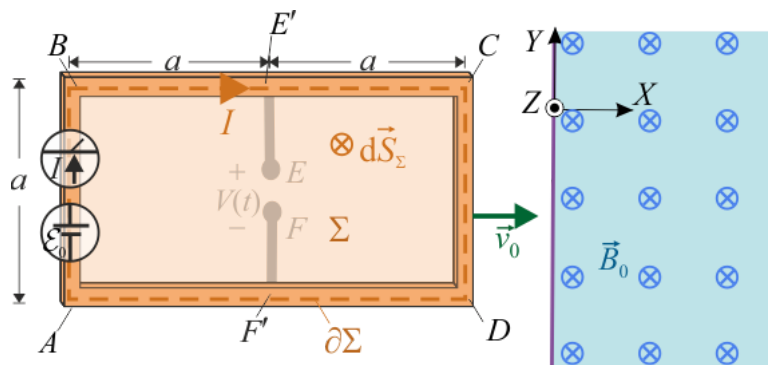


2 Solución

2.1 (a) Señales eléctricas en la espira antes de entrar en la región magnetizada

2.1.1 Intensidad de la corriente eléctrica en la espira

Como primer paso, modelaremos el circuito eléctrico del sistema descrito para instantes de tiempo $t < 0$; es decir, antes de que la espira móvil $ABCD$ entre en la región uniformemente magnetizada, que se corresponde con el semiespacio formado por los puntos $P(x,y,z)$ tales que $x < 0$. En dicha región, es nulo el flujo magnético a través de cualquier superficie Σ que tuviese como contorno a la espira rectangular. Por tanto, la única fuerza electromotriz existente en la espira $ABCD \equiv \partial\Sigma$ es la \mathcal{E}_0 del generador eléctrico ideal incrustado en el lado AB .



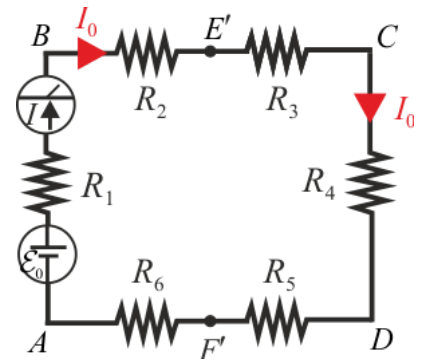
Por otra parte, la espira está formada por cuatro barras rectilíneas y filiformes del mismo material óhmico (cuya resistividad tendrá un valor ρ_Ω), de idéntica sección S y lados iguales dos a dos. Y teniendo en cuenta que los conductores utilizados para medir el voltaje $V(t)$ están conectados a los respectivos centros E' y F' de los lados largos BC y DA , podemos descomponer la espira completa en seis tramos idénticos, filiformes y rectilíneos, también de igual longitud a .

En consecuencia, el modelo eléctrico de la espira consistirá en la f.e.m. del generador ideal, conectada a la asociación en serie de seis resistencias eléctricas idénticas $R_i = \rho_\Omega a/S$. Y si la resistencia total de la espira es el valor

conocido R , se tendrá...

$$R_{\partial\Sigma} = \sum_{i=1}^6 R_i = 6 R_i = R \implies R_i = \rho_{\Omega} \frac{a}{S} = \frac{R}{6}, \text{ para } i = 1, \dots, 6$$

De la aplicación de la primera ley de Kirchoff en cada uno de los nodos correspondientes a las conexiones en serie de estas resistencias se obtiene que todas ellas son recorridas por la misma intensidad de corriente eléctrica, que será también la misma que recorre el generador, saliendo por el electrodo positivo de éste y recorriendo el circuito-espira en sentido horario, para el cual asumiremos que $I(t) > 0$. La aplicación de la segunda ley de Kirchoff en la malla que se corresponde con la espira permite establecer la ecuación del circuito en $\partial\Sigma$. Como se trata de un circuito cerrado...

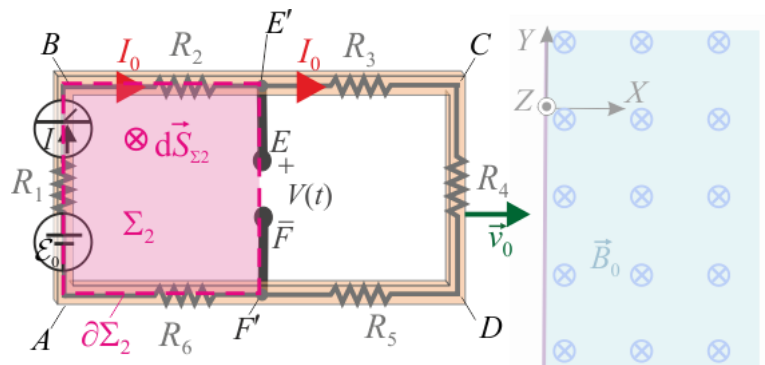


$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial\Sigma} = \sum_{i=1}^6 I_i R_i \implies \mathcal{E}_0 = I(t) \sum_{i=1}^6 R_i = R I(t) \implies I(t < 0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = I_0$$

2.1.2 Voltaje en la rama abierta del centro de la espira

Para determinar el voltaje entre los extremos abiertos (y próximos) E y F , hemos de aplicar la segunda ley de Kirchoff en alguna de las dos mallas que incluyen estos puntos; es decir, la $\partial\Sigma_1 \equiv CDF'FEE'$, o bien la $\partial\Sigma_2 \equiv ABE'EFF'$, ambas recorridas en el sentido de intensidad de corriente positiva en la espira conductora. Obsérvese que se trata de mallas abiertas: al no existir conexión entre los extremos E y F , no puede haber corriente eléctrica en los cables EE' y FF' ; sin embargo, las mallas $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$ están parcialmente recorridas por la corriente eléctrica de intensidad constante I_0 en los tramos correspondientes a la espira conductora.

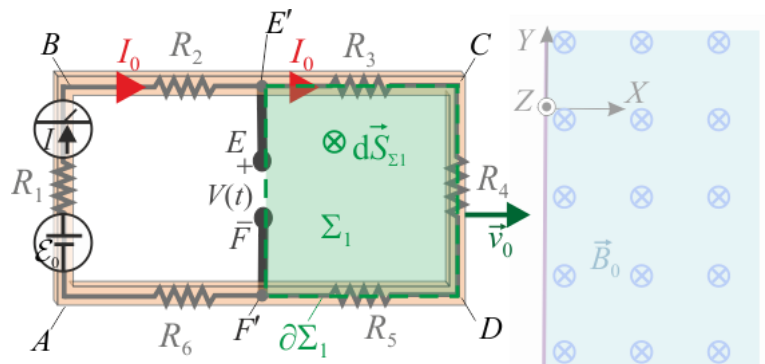
Podemos comprobar que el resultado que se obtiene para la señal de voltaje $V(t) = V_E - V_F$ es el mismo independientemente de la malla en que se aplique la segunda ley de Kirchoff. Si optamos por la malla $\partial\Sigma_2$, el modelo de circuito estará constituido por la fuerza electromotriz del generador real (recuérdese que para $t < 0$ no hay f.e.m. inducida en la espira) y las resistencias R_1, R_2 y R_6 , correspondientes a los tramos de espira AB, BE' y $F'A$, respectivamente. Por tanto,



$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial\Sigma_2} = I_0 (R_1 + R_2 + R_6) + V_E - V_F \implies \mathcal{E}_0 = 3 I_0 \frac{R}{6} + V(t) \implies V(t < 0) = \mathcal{E}_0 - I_0 \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}_0}{2}$$

Nótese que en los cables EE' y FF' no se produce ninguna caída de tensión o voltaje, ya que por ellos no circula corriente eléctrica al estar en abierto.

Si aplicamos la segunda ley de Kirchoff en la malla abierta $\partial\Sigma_1$, encontramos que aquí no habría f.e.m. de ningún tipo; sólo los cables EE' y FF' , y las resistencias R_3, R_4 y R_5 conectadas en serie, que se corresponden con los tramos conductores, $E'C, CD$ y DF' . Planteando la ecuación del circuito en esta malla se obtiene...



$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial\Sigma_1} = I_0 (R_2 + R_4 + R_5) + V_F - V_E \implies 0 = 3 I_0 \frac{R}{6} - V(t) \implies V(t < 0) = I_0 \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}_0}{2}$$

2.2 (b) Señales eléctricas en la espira tras entrar en la región magnetizada

2.2.1 Flujo magnético a través de la espira y fuerza electromotriz inducida

Para instantes $t > 0$ la espira se mueve dentro de la región magnetizada, contenida en todo momento en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético existente, $\vec{B}_0 = -B_0 \vec{k}$, con $B_0 > 0$. Hay que tener en cuenta que la espira se desplaza en la dirección de sus lados de longitud $2a$, con celeridad constante de valor $v_0 = a/T$, por tanto, la espira $\partial\Sigma \equiv ABCD$ sólo se encontrará parcialmente sometida al campo magnético en el intervalo de tiempo $0 < t < 2T$, y para instantes $t > 2T$, toda la espira estará dentro de la región de campo uniforme.

Para calcular el flujo magnético $\Phi_m|_{\Sigma}$ a través de la espira $\partial\Sigma$ se toma cualquier superficie abierta Σ , cuyo contorno coincida con la espira; por ejemplo, el rectángulo delimitado por ésta en el plano que la contiene. Además, al hacer corresponder el valor positivo de la intensidad de la corriente eléctrica con el sentido horario de ésta, se tendrá que $d\vec{S}|_{\Sigma} = -dS \vec{k}$ será el vector elemento de superficie en la Σ a través de la cuál calcularemos el flujo magnético. Por tanto,

$$\Phi_m|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} B_0 dS = B_0 S(t)$$

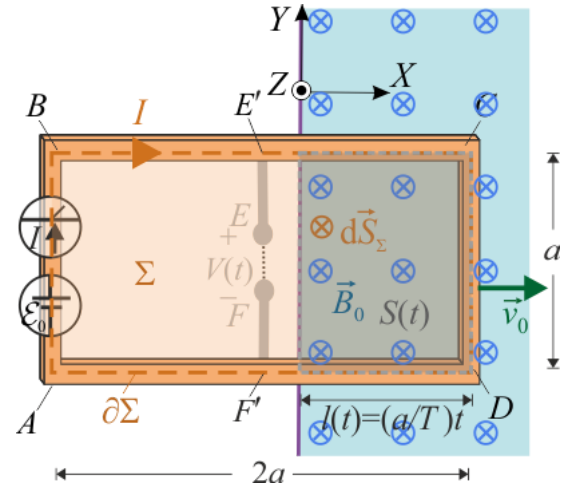
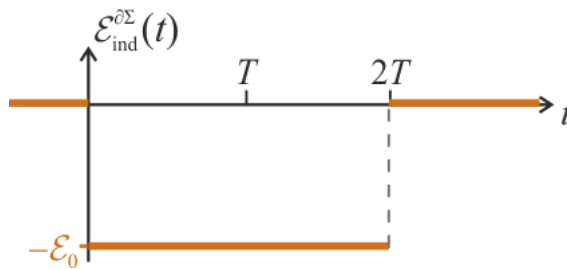
donde $S(t)$ es el área de la parte del rectángulo Σ a través de la cuál fluye el campo magnético \vec{B}_0 en el instante t . Por tanto, para instantes $t > 0$, a través de la espira Σ se verifica un flujo magnético, en general variable en el tiempo, según la ley horaria

$$\Phi_m^{\Sigma}(t > 0) = B_0 S(t) = \begin{cases} B_0 a v_0 t = B_0 a^2 \frac{t}{T}; & \text{si } 0 < t < 2T \\ B_0 2a^2, \text{ cte.}; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$

Por tanto, en virtud de las leyes de Faraday y de Lenz, en la espira se inducirá una f.e.m. cuyo efecto tiende a oponerse a dicha variación del flujo.

En consecuencia, al realizar un modelo circuital de la espira $\partial\Sigma \equiv ABCD$ una vez que ésta entra en la región magnetizada, es necesario considerar que,

además del generador real incrustado en el lado AB , hay una fuerza electromotriz inducida cuyo valor, medido en el mismo sentido que la de dicho generador, es...



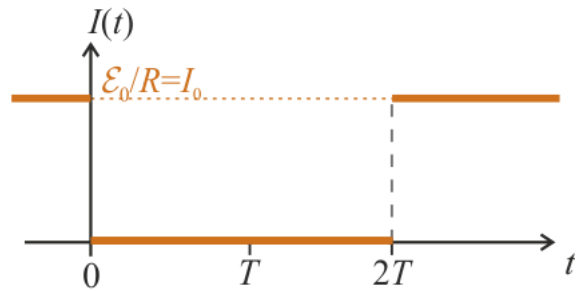
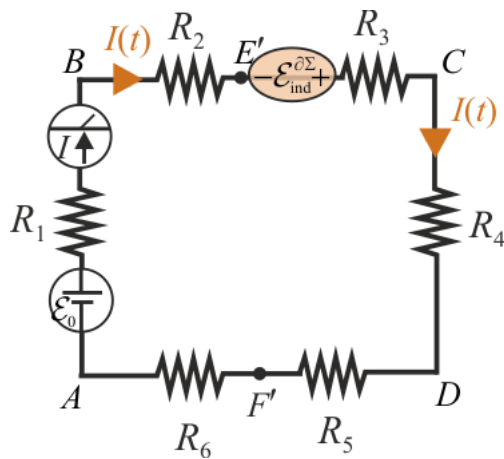
$$\mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma}(t > 0) = -\left. \frac{d\Phi_m(t)}{dt} \right|_{\Sigma} = \begin{cases} -B_0 a v_0 = -\mathcal{E}_0; & \text{si } 0 < t < 2T \\ 0; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$

2.2.2 Intensidad de corriente eléctrica en la espira

Teniendo en cuenta de nuevo que los conductores que conforman la espira se modelan como seis resistencias eléctricas iguales conectadas en serie (entre sí y con las f.e.m. anteriormente descritas), aplicamos las leyes de Kirchoff de manera análoga al apartado anterior para obtener la ecuación del circuito (cerrado) que permite determinar la señal de intensidad de corriente eléctrica que recorre la espira $\partial\Sigma$ para instantes de tiempo $t > 0$:

$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial\Sigma} = \sum_{i=1}^6 I_i R_i \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma}(t) = I(t) \sum_{i=1}^6 R_i = R I(t) \quad \Rightarrow$$

$$I(t > 0) = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma}(t)}{R} = \begin{cases} 0; & \text{si } 0 < t < 2T \\ \frac{\mathcal{E}_0}{R} = I_0; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$



Es decir, mientras la espira se mueve parcialmente sometida al campo magnético de la región $x > 0$ (en el intervalo $0 < t < 2T$), no hay corriente eléctrica en la espira; esto es consecuencia de que los valores de los parámetros del sistema se hayan ajustado para que se cumpla la relación $\mathcal{E}_0 = B_0 a v_0$. Posteriormente, para instantes de tiempo $t > 2T$ en que toda la espira está dentro de aquella región, vuelve a circular corriente eléctrica en el circuito, siendo su intensidad la misma que para los instantes $t > 0$.

2.2.3 Voltaje en la rama abierta del centro de la espira

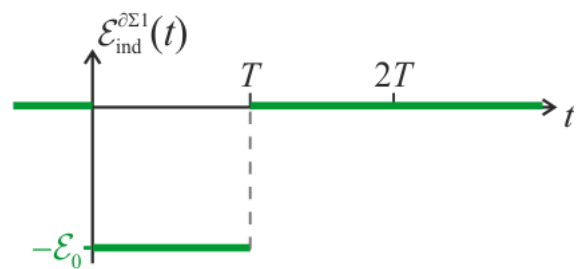
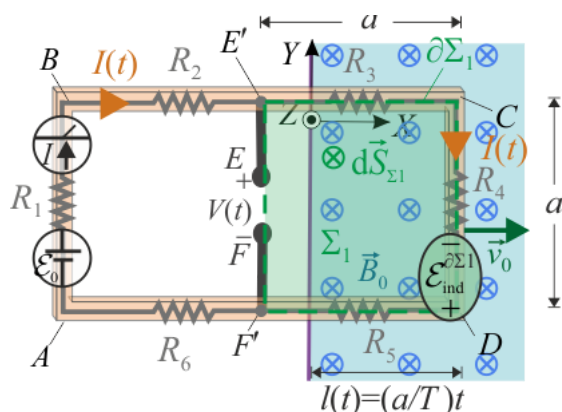
Al igual que en el apartado (a), la señal de voltaje entre los extremos abiertos E y F , puede obtenerse de la aplicación de la segunda ley de Kirchoff en cualquiera de las dos mallas abiertas, $\partial\Sigma_1 \equiv CDF'FEE'$ ó $\partial\Sigma_2 \equiv ABE'EFF'$. Obsérvese que, según acabamos de determinar, en el intervalo de tiempo $0 < t < 2T$ no circula corriente eléctrica por ninguna de las dos mallas; y para instantes $t > 2T$ vuelve a circular de nuevo por la espira (y, por tanto, por las correspondientes ramas de $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$), una corriente eléctrica de intensidad I_0 .

Por otra parte, nótese que al aplicar la segunda ley de Kirchoff en una de las mallas, es necesario tener en cuenta exclusivamente las fuerzas electromotrices (de generadores o inducidas) que existan en dicha malla. Por tanto, habrá de evaluarse cómo es la variación de flujo magnético a través de las superficies Σ_1 y Σ_2 delimitadas por los contornos $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$, respectivamente. En ambos casos, consideraremos que dichas superficies son sendos cuadrados de lado a contenidos en el plano OXY donde se la espira realiza el movimiento. En consecuencia, si mantenemos el criterio de intensidad de corriente positiva en el sentido horario, en cada punto de Σ_1 y Σ_2 , el vector elemento de superficie será de la forma $d\vec{S}_{\Sigma_i} = -dS \vec{k}$, (para $i = 1, 2$).

Cálculo en $\partial\Sigma_1$

Como la espira se mueve con velocidad constante de valor $v_0 = a/T$, y comienza a entrar en la región magnetizada en el instante $t = 0$, se comprueba fácilmente que el flujo magnético a través de la malla $\partial\Sigma_1 \equiv CDF'FEE'$ será variable en el tiempo durante el intervalo $0 < t < T$, dando lugar a una f.e.m. inducida; por el contrario, para instantes posteriores a T , el flujo magnético será constante en el tiempo, y no habrá f.e.m. inducida en $\partial\Sigma_1$:

$$\Phi_m^{\Sigma_1}(t) = \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} B_0 a v_0 t; & \text{si } 0 < t < T \\ B_0 a^2, \text{ cte.}; & \text{si } T < t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_1}(t) = -\left. \frac{d\Phi_m(t)}{dt} \right]_{\Sigma_1} = \begin{cases} -B_0 a v_0 = -\mathcal{E}_0; & \text{si } 0 < t < T \\ 0; & \text{si } T < t \end{cases}$$

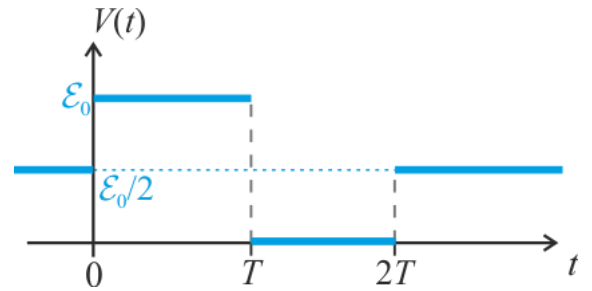


Calculemos ahora la señal $V(t) = V_E - V_F$ aplicando la segunda ley de Kirchoff en la malla considerada, donde la única f.e.m. existente sería la inducida por la variación del flujo magnético:

$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial \Sigma_1} = I(t) (R_3 + R_4 + R_5) + V_F - V_E \rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial \Sigma_1}(t) = \frac{R}{2} I(t) - V(t)$$

Teniendo en cuenta ahora el comportamiento particular de la [intensidad de corriente en la espira](#) (nula mientras se encuentra parcialmente sometida al campo magnético y constante una vez que penetra completamente en la región magnetizada), así como el de la f.e.m. inducida en esta malla $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial \Sigma_1}(t)$ que acabamos de obtener para instantes $t > 0$, se obtiene...

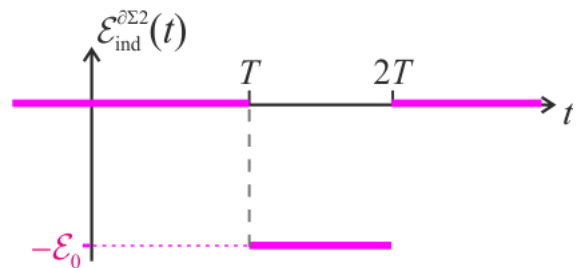
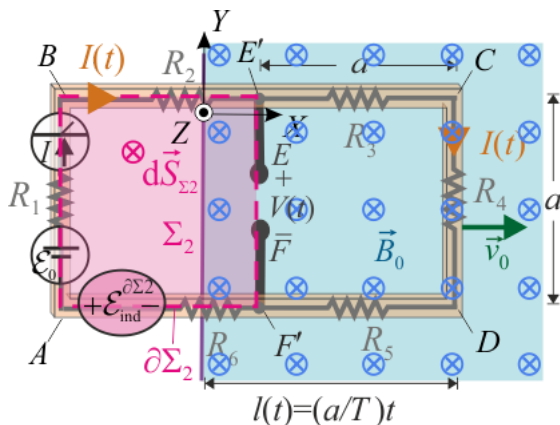
$$V(t) = \frac{R}{2} I(t) - \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial \Sigma_1}(t) = \begin{cases} -(-\mathcal{E}_0) = \mathcal{E}_0; & \text{si } 0 < t < T \\ 0; & \text{si } T < t < 2T \\ \frac{R}{2} I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{2}; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$



Cálculo en $\partial \Sigma_2$ (alternativo)

Observéese que la malla $\partial \Sigma_2 \equiv ABE'EFF'$ comenzará a penetrar en la región magnetizada en el instante de tiempo $t = T$; como la espira se mueve con la misma velocidad $v_0 = a / T$ en todo instante y a es la longitud de los lados de esta malla, se tendrá que el flujo magnético a través de Σ_2 es nulo en instantes de tiempo $t < T$, variable en el intervalo $T < t < 2T$ y constante para $t > 2T$. En consecuencia...

$$\Phi_m^{\Sigma_2}(t) = \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0; & \text{si } t < T \\ B_0 a (v_0 t - a); & \text{si } T < t < 2T \\ B_0 a^2, \text{ cte.}; & \text{si } 2T < t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial \Sigma_2}(t) = - \left. \frac{d\Phi_m(t)}{dt} \right|_{\Sigma_2} = \begin{cases} 0; & \text{si } t < T \\ -B_0 a v_0 = -\mathcal{E}_0; & \text{si } T < t < 2T \\ 0; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$



En esta segunda malla, además de la posible f.e.m. inducida que acabamos de determinar, está presente la f.e.m. del generador ideal incrustado en el lado AB de la espira. Por tanto, la segunda ley de Kirchoff se formula en los siguientes términos:

$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial \Sigma_2} = I(t) (R_1 + R_2 + R_6) + V_E - V_F \rightarrow \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial \Sigma_2}(t) = \frac{R}{2} I(t) + V(t)$$

Sustituyendo en esta expresión el comportamiento de la [intensidad de corriente en la espira](#), así como el de la f.e.m. inducida, $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial \Sigma_2}(t)$, puede comprobarse que la solución para el voltaje $V(t)$ en la malla $\partial \Sigma_2$ es idéntica a la obtenida en la otra la malla:

$$V(t) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial \Sigma_2}(t) - \frac{R}{2} I(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_0; & \text{si } 0 < t < T \\ \mathcal{E}_0 + (-\mathcal{E}_0) = 0; & \text{si } T < t < 2T \\ \mathcal{E}_0 - \frac{R}{2} I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{2}; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$

Por otra parte, obsérvese que si comparamos los resultados de [flujo magnético y f.e.m. inducida en la espira completa](#) $\partial\Sigma$ que se obtuvieron en el apartado anterior, con los obtenidos en las mallas $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$, comprobamos que se verifican las relaciones:

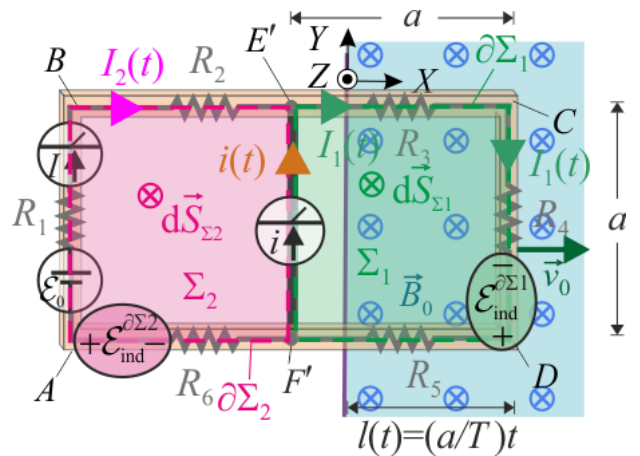
$$\Phi_m^{\Sigma} = \Phi_m^{\Sigma_1} + \Phi_m^{\Sigma_2} \implies \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma} = \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_1} + \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_2}$$

2.3 (c) Señales eléctricas en la espira con cable conductor en el centro

Al colocar el amperímetro entre los puntos E y F éstos quedan cortocircuitados, y puesto que se asume que el cable tiene resistencia despreciable, comparada con la de la espira, se tendrá que los puntos centrales de los lados largos BC y DA están también cortocircuitados. Esto se traduce en que el sistema ya no estará formado por una espira, sino por dos espiras (circuitos cerrados) que coinciden con las mallas $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$, y que comparten el lado $E'F'$ formado por el cable conductor de resistencia nula. Por tanto, la malla $\partial\Sigma_1 \equiv E'CDF'$ constituye un circuito cerrado modelado por las resistencias R_3, R_4 y R_5 conectadas en serie que, como sabemos, son equivalentes a una resistencia de valor $R/2$. Además, consideraremos que las ramas de $\partial\Sigma_1$, no comunes con $\partial\Sigma_2$, son recorridas por una corriente eléctrica de intensidad I_1 , que consideraremos positiva en el sentido horario. Por su parte, la malla $\partial\Sigma_2 \equiv ABE'F'$ se corresponde con un circuito cerrado modelado por el generador de f.e.m. \mathcal{E}_0 y las resistencias R_1, R_2 y R_6 conectadas en serie, que también son equivalentes a una resistencia de valor $R/2$. Las ramas no comunes con $\partial\Sigma_1$ son recorridas por una corriente eléctrica de intensidad I_2 , que también tomaremos en sentido horario; por tanto, se tendrá que el valor de dicha intensidad coincidirá con la señal registrada por el amperímetro incrustado en AB : $I_2 = I(t)$. La rama común a las dos espiras, $E'F'$, es recorrida por la corriente eléctrica de intensidad $i(t)$, que consideraremos positiva si recorre en el sentido *ascendente*; es decir, de F' hacia E' . Por tanto, si aplicamos la primera ley de Kirchoff en el nodo E' , se tendrá:

$$\left[\sum_j I_j \right]_{E'} = -I_1 + i(t) + I_2 = 0 \implies i(t) = I_1(t) - I_2(t)$$

Por otra parte, cuando cada uno de los dos circuitos cerrados descritos entra en la región de campo magnético, se establecen los correspondientes flujos magnéticos, $\Phi_m^{\Sigma_1}$ a través de Σ_1 , y $\Phi_m^{\Sigma_2}$ a través de Σ_2 , que mientras varíen en el tiempo, producen las fuerzas electromotrices inducidas $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_1}$ y $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_2}$ en las correspondientes espiras. Obsérvese que los flujos magnéticos y las consiguientes fuerzas electromotrices inducidas en las espiras, son exactamente las mismas magnitudes que en los apartados anteriores, en que la rama $E'F'$ permanecía abierta; es decir...



$$\Phi_m^{\Sigma_1}(t) = \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0; & \text{si } t < 0 \\ B_0 a v_0 t; & \text{si } 0 < t < T \\ B_0 a^2, \text{ cte.}; & \text{si } T < t \end{cases} \implies \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_1}(t) = - \left. \frac{d\Phi_m(t)}{dt} \right|_{\Sigma_1} = \begin{cases} 0; & \text{si } t < 0 \\ -B_0 a v_0 = -\mathcal{E}_0; & \text{si } 0 < t < T \\ 0; & \text{si } T < t \end{cases}$$

... y...

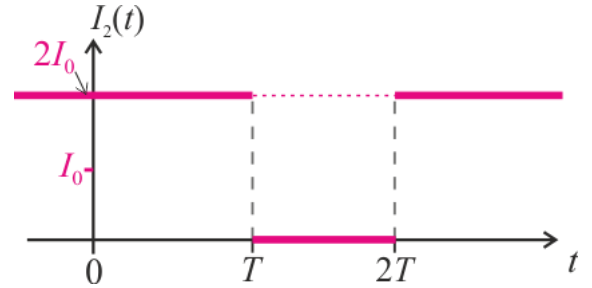
$$\Phi_m^{\Sigma_2}(t) = \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0; & \text{si } t < T \\ B_0 a (v_0 t - a); & \text{si } T < t < 2T \\ B_0 a^2, \text{ cte.}; & \text{si } 2T < t \end{cases} \implies \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_2}(t) = - \left. \frac{d\Phi_m(t)}{dt} \right|_{\Sigma_2} = \begin{cases} 0; & \text{si } t < T \\ -B_0 a v_0 = -\mathcal{E}_0; & \text{si } T < t < 2T \\ 0; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$

Aplicamos la segunda ley de Kirchoff en el circuito cerrado formado por la espira $\partial\Sigma_1 \equiv CDF'E'$, donde la resistencia eléctrica R_c de la rama $F'E'$ es despreciable frente al valor $R/2$ de los otros lados:

$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial\Sigma_1} = \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_1}(t) = I_1 (R_3 + R_4 + R_5) + i(t) R_c \simeq I_1(t) \frac{R}{2} \implies$$

$$I_1(t) = \frac{2}{R} \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_1}(t) = \begin{cases} 0; & \text{si } t < 0 \\ -\frac{2}{R} \mathcal{E}_0 = -2I_0; & \text{si } 0 < t < T \\ 0; & \text{si } T < t \end{cases}$$

Si evaluamos dicha ley en el circuito cerrado $\partial\Sigma_2 \equiv ABE'F'$, se tendrá...

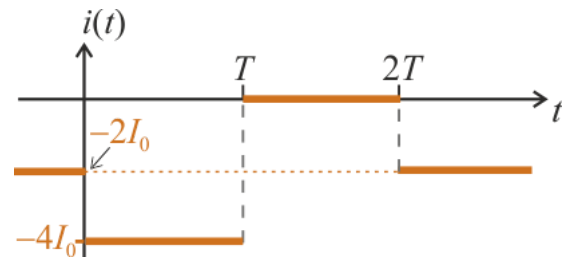


$$\left[\sum_j \mathcal{E}_j \right]_{\partial\Sigma_2} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_2}(t) = I_2(R_1 + R_2 + R_6) + i(t) R_c \cong I_2(t) \frac{R}{2} \implies$$

$$I_2(t) = \frac{2}{R} [\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}^{\partial\Sigma_2}(t)] = \begin{cases} \frac{2}{R} \mathcal{E}_0 = 2I_0; & \text{si } t < T \\ \frac{2}{R} [\mathcal{E}_0 + (-\mathcal{E}_0)] = 0; & \text{si } T < t < 2T \\ \frac{2}{R} \mathcal{E}_0 = 2I_0; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$

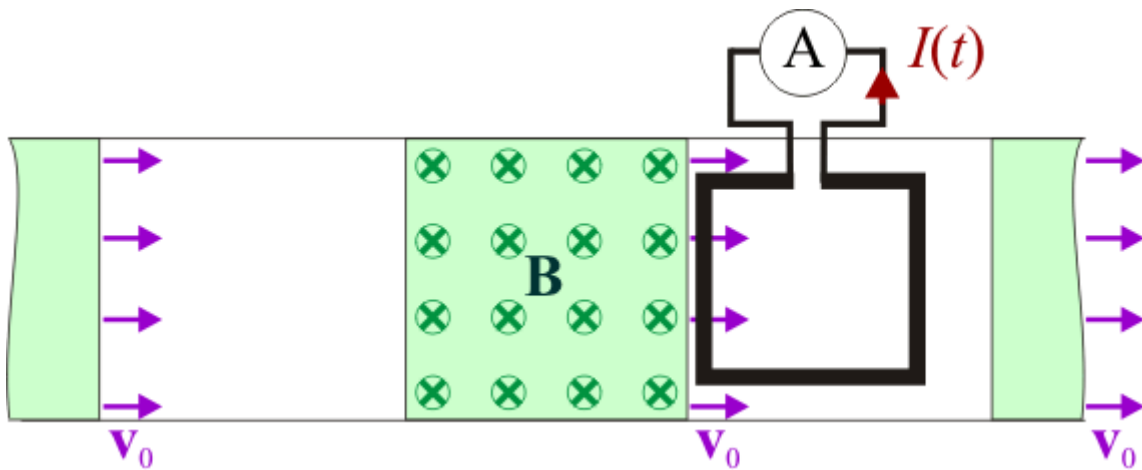
Finalmente, restando estas dos intensidades obtendremos cómo es la señal de intensidad de corriente registrada por el amperímetro situado en el cable central:

$$i(t) = I_1(t) - I_2(t) = \begin{cases} -2I_0; & \text{si } t < 0 \\ -2I_0 - 2I_0 = -4I_0; & \text{si } 0 < t < T \\ 0; & \text{si } T < t < 2T \\ -2I_0; & \text{si } 2T < t \end{cases}$$



1 Enunciado

Para implementar un lector de cinta magnética se utiliza una espira cuadrada conductora. Ésta se halla conectada a un amperímetro que mide la intensidad inducida cuando bajo ella pasa una cinta en la cuál hay una secuencia de regiones magnetizadas y no magnetizadas. Aquéllas producen un campo magnético \mathbf{B} , que puede considerarse localizado en dichas regiones y prácticamente uniforme en las proximidades de la cinta, siendo su dirección perpendicular al plano de la espira lectora. El amperímetro está conectado de manera que mide valores positivos de intensidad cuando la corriente inducida recorre la espira lectora en sentido antihorario, teniendo ésta un tamaño algo menor que las secciones magnetizadas. Si la cinta se desplaza con velocidad constante v_0 respecto de la espira lectora fija, cómo es la corriente inducida en la espira cuando bajo ella pasa una sección magnetizada en sentido negativo (ver figura).



2 Solución

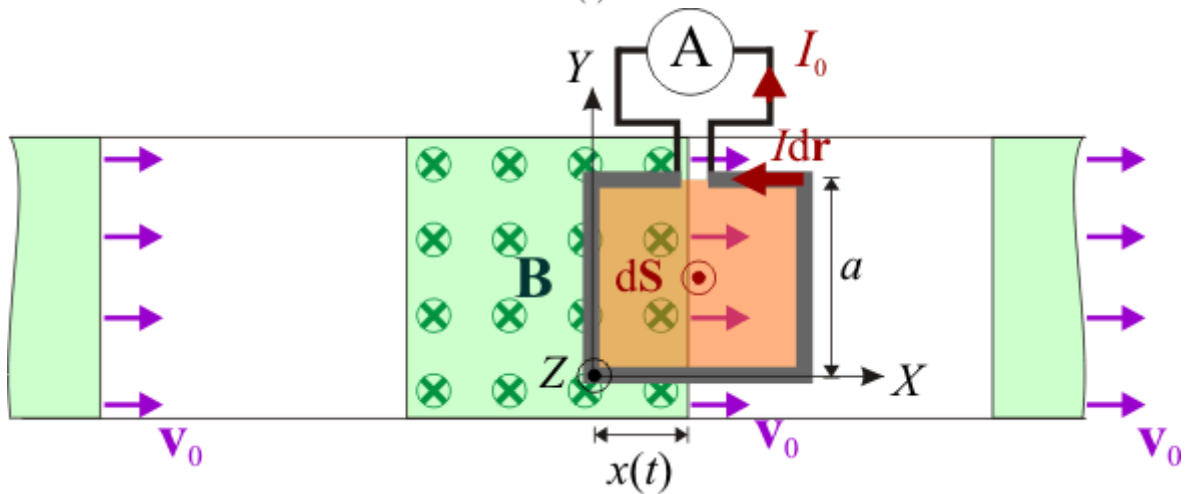
Adoptamos un sistema de referencia $OXYZ$ solidario con la espira lectora fija, de manera que ésta se halla en el plano OXY . En consecuencia, el campo magnético \mathbf{B} de la sección magnetizada que pasa bajo la espira tendrá la dirección del eje OZ y sentido negativo. Por otra parte, para medir el flujo de este campo magnético a través de la sección σ de la espira, tomamos la superficie cuadrada de lado a que se apoya en ella. Los vectores elementos de superficie $d\mathbf{S}$ en la sección de la espira son paralelos al vector unitario \mathbf{k} . En cuanto a su dirección, ésta queda determinada por el sentido adjudicado a la medida de la corriente en la espira lectora. Y como se han de medir como positivas las corrientes eléctricas que recorren aquélla en sentido antihorario, el flujo magnético a través de la espira habrá de medirse tomando los $d\mathbf{S}$ con sentido positivo. Así, en todo momento se tendrá:

$$\mathbf{B} = -B \mathbf{k}; \quad d\mathbf{S} = dS \mathbf{k}$$

Cuando la sección magnetizada empieza a pasar por debajo de la espira, el flujo

campo magnético a través de ésta será igual al producto de la componente del campo por el área parcial $S(t) = a x(t)$ de la sección magnetizada que hay bajo la espira en el instante arbitrario t :

$$\Phi_m]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -B \int_{S(t)} dS = -B a x(t) = \Phi_m(t)]_{\Sigma}$$



Por tanto, desde el instante inicial hasta el momento $t_0 = a / v_0$ en que el campo de la sección magnetizada fluye por completo a través de Σ , se induce en ésta una fuerza electromotriz opuesta a la variación del flujo, que será igual al producto de la intensidad de corriente inducida por la resistencia eléctrica de la espira. Y como la cinta se mueve bajo el lector con velocidad constante de módulo v_0 , ésta será la derivada con respecto al tiempo de la anchura " $x(t)$ " de la franja de sección magnetizada bajo la espira:

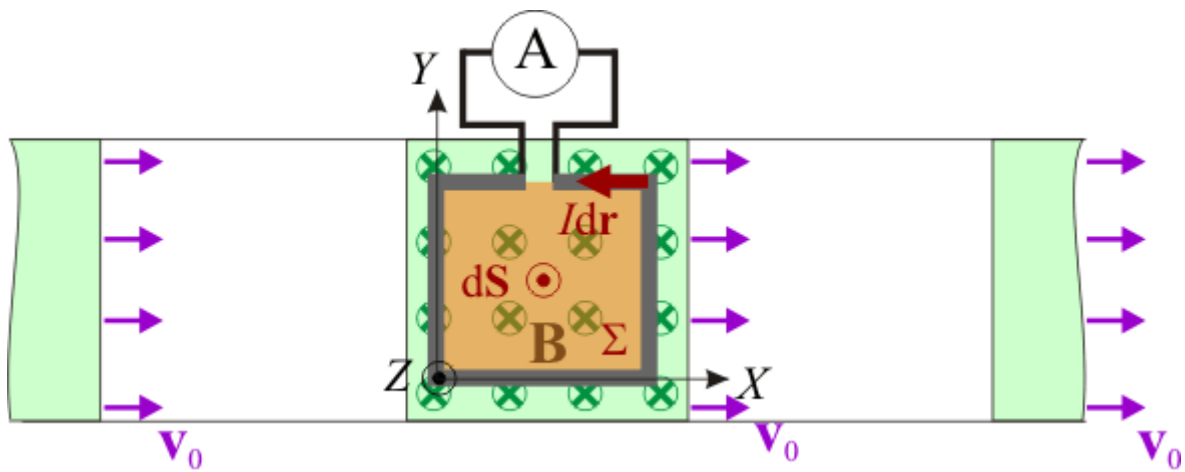
$$R I(t) = \mathcal{E}_{\text{ind}} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right]_{\Sigma} = a B \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{a B v_0}{R} = I_0; \text{ cte. } (0 < t < t_0)$$

Es decir, durante dicho intervalo de tiempo, se induce en la espira una corriente eléctrica constante que la recorre en sentido positivo.

Como la anchura de la sección magnetizada es algo mayor que la del lector, hay un intervalo de tiempo a partir del instante t_0 , en que el flujo magnético es constante:

$$\Phi_m]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -B a^2 \Rightarrow I(t) = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt} = 0; (t_0 < t < t_1)$$



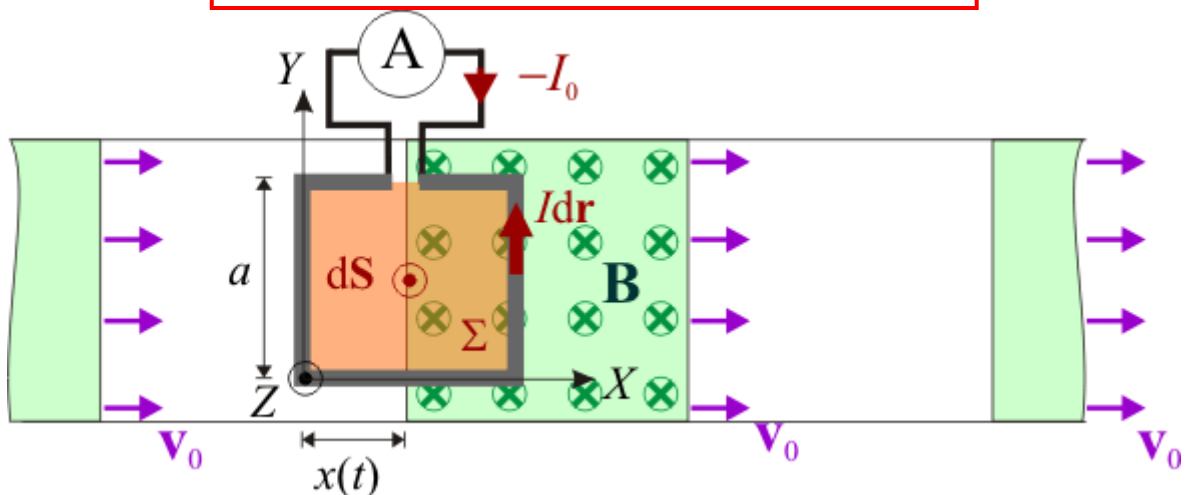
A partir del instante t_1 , la sección magnetizada comienza a salir de debajo del lector. Hasta que termina el proceso en un instante t_2 el campo magnético fluye a través de una franja de largo a y ancho $a - x(t)$. Se tendrá entonces...

$$\Phi_{m|\Sigma}(t) = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -B \int_{S(t)} dS = -B a [a - x(t)]$$

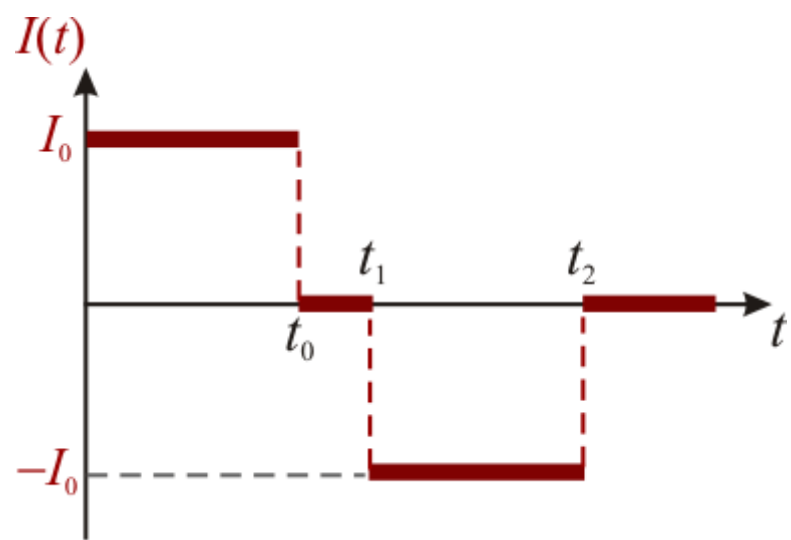
En este caso, la corriente eléctrica inducida vuelve a ser constante, con el mismo valor que en el primer intervalo de tiempo, pero recorriendo la espira lectora en sentido horario:

$$RI(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt} \Big|_{\Sigma} = -\frac{aB}{R} \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$I(t) = -\frac{aBv_0}{R} = -I_0; \text{ cte. } (t_1 < t < t_2)$$

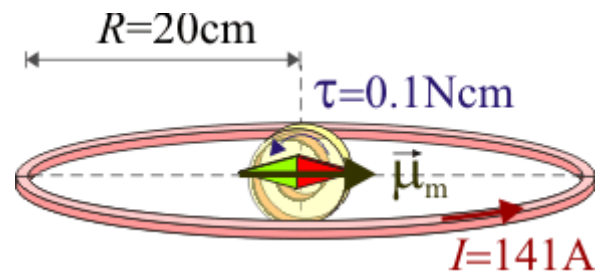


A partir del instante t_2 , bajo el lector habrá una región no magnetizada por el campo y flujo magnético serán nulos. En consecuencia, tampoco habrá corriente inducida en la espira.



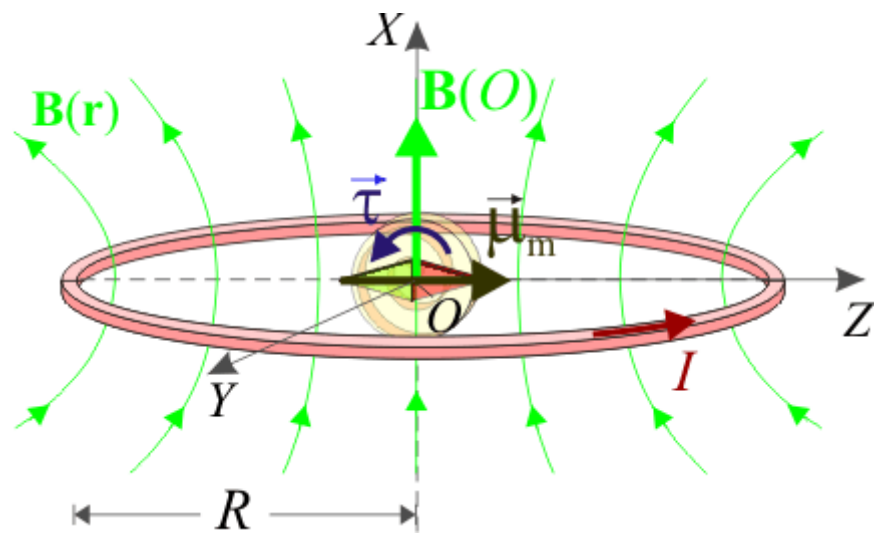
1 Enunciado

Para medir el módulo μ_m del momento dipolar magnético $\vec{\mu}_m$ de un pequeño imán, se diseña un sistema consistente en un dinamómetro de torsión y una espira circular de radio $R = 20 \text{ cm}$ y gran sección, por la que pueden circular corrientes de mucha intensidad. Colocado el imán en el centro de la espira, fijado al dinamómetro, éste permite medir el momento o par de fuerzas aplicadas al imán, que puede ser considerado un ente puntual. Se comprueba que cuando el imán se encuentra con su eje S-N contenido en el plano de la espira (ver figura), y por ésta circula una intensidad de 141 A , el par de fuerzas que actúa sobre el imán es $|\vec{\tau}| = 0.1 \text{ Ncm}$. ¿Cuánto vale el momento dipolar magnético del imán?



2 Solución

En el enunciado se indica que las dimensiones del imán son lo suficientemente pequeñas en comparación con el radio R de la espira, como para poder considerar aquél como un ente puntual situado en el centro O de la espira. En consecuencia, si en dicho punto existe un campo magnético $\mathbf{B}(O)$, creado por la corriente eléctrica que recorre la espira, se ejercerá un momento o par de fuerzas $\vec{\tau}$, tal que:



$$\vec{\tau}]_O = \vec{\mu}_m \times \mathbf{B}(O)$$

siendo $\vec{\mu}_m$ el momento dipolar magnético. Así, cuando esta magnitud vectorial, característica del imán, no esté alineada con el campo magnético, el par $\vec{\tau}$ será no nulo, e intentará forzar dicha alineación.

Tomemos un sistema de referencia cuyo origen se halle en el punto O , con el eje OX en la dirección perpendicular al plano que contiene la espira y con el sentido definido por el de circulación de la corriente eléctrica que recorre

aquella. Usando la expresión del [campo magnético creado en el eje de una espira circular](#), y particularizando al centro de ésta, se obtiene:

$$\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \mathbf{i}$$

Por otra parte, el imán está conectado a un dispositivo que fuerza a que su eje S-N se halle alineado con un diámetro de la espira. Si tomamos como eje OZ la dirección de dicho diámetro, las expresiones analíticas del momento dipolar magnético del imán y del par de fuerzas que actúa sobre el serán:

$$\vec{\mu}_m = |\vec{\mu}_m| \mathbf{k} \quad \implies \quad \vec{\tau}]_O = \vec{\mu}_m \times \mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} |\vec{\mu}_m| (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) = |\vec{\tau}| \mathbf{j}$$

Y utilizando este último resultado, puede determinarse el módulo del momento dipolar magnético del imán, a partir de la intensidad I de la corriente que recorre la espira, el radio R de ésta y el par de fuerzas $|\vec{\tau}|$ ejercido por el campo magnético sobre el imán y medido por el dinamómetro:

$$|\vec{\mu}_m| = \frac{2R |\vec{\tau}|}{\mu_0 I} = 2.26 \text{ Am}^2$$

1 Enunciado

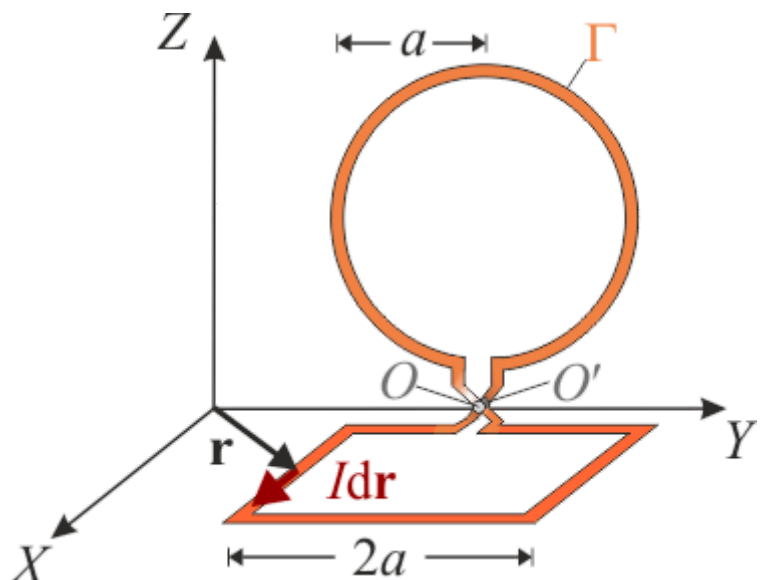
Se ha construido una antena consistente en dos pequeñas espiras planas contenidas en sendos planos ortogonales y conectadas entre sí tal como se indica en la figura. La que está situada en el plano $z = 0$ tiene forma cuadrada, siendo $2a$ la longitud de sus lados. La contenida en el plano $x = 0$ es una circunferencia de radio a . ¿Cuál es el momento dipolar magnético de la antena cuando una intensidad de corriente I recorre la espira cuadrada en sentido antihorario (ver figura)?

2 Solución

La antena consiste en un conductor filiforme que describe un circuito cerrado Γ . Cuando es recorrida por una corriente eléctrica con la intensidad I y en el sentido indicado por el elemento de corriente $I d\mathbf{r}$, la antena se comporta a grandes distancias como un dipolo magnético que estará caracterizado por un momento dipolar magnético,

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

donde \mathbf{r} es el radio-vector variable que indica la posición de los puntos del circuito respecto de un punto fijo arbitrariamente elegido. Obsérvese que, al cruzarse su trazado, existen dos puntos del conductor, O y O' , a los que corresponden elementos de corriente distintos pero que coinciden en un mismo punto geométrico. De esta forma, la anterior integral se puede descomponer en la suma de dos integrales a lo largos de sendas curvas cerradas:



$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \left[\oint_{O(\partial\Sigma_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} + \oint_{O'(\partial\Sigma_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right]$$

una de forma circular, que denominaremos $\partial\Sigma_1$, y otra $\partial\Sigma_2$, de forma cuadrada.

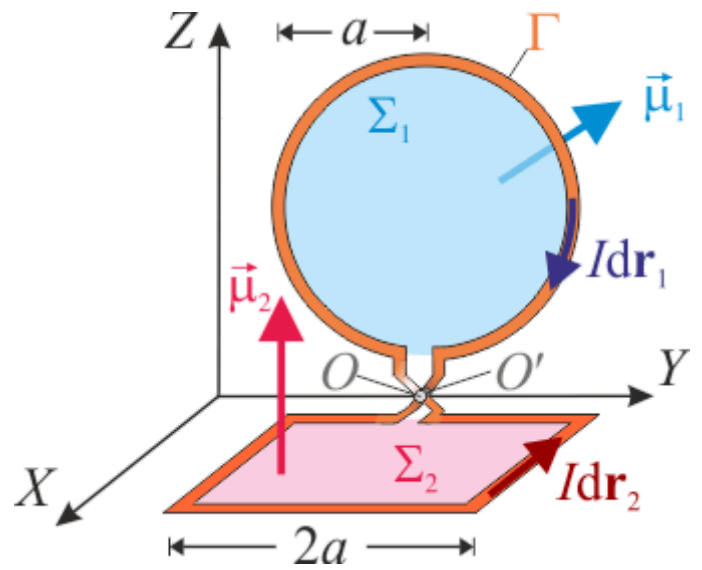
Pero, cada uno de los términos de la anterior expresión es, por definición el momento dipolar magnético de la espira correspondientes. Y como $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$ son espiras contenidas en sendos planos ortogonales, el momento dipolar de cada una de ellas será un vector de dirección perpendicular al plano de la espira y módulo igual al producto de la intensidad de corriente por el área de la

superficie plana que encierra; el sentido del momento dipolar está determinado por el sentido en que la corriente recorre la espira plano, según el criterio del triedro directo:

$$\vec{\mu}_1 = \frac{I}{2} \oint_{\partial\Sigma_1} \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 = -I\pi a^2 \mathbf{i}$$

$$\vec{\mu}_2 = \frac{I}{2} \oint_{\partial\Sigma_2} \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_2 = I4a^2 \mathbf{k}$$

Sumando estos dos términos, obtenemos el momento dipolar magnético de la antena Γ :



$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = I a^2 (-\pi \mathbf{i} + 4 \mathbf{k})$$

1 Enunciado

Calcule el momento magnético dipolar de una esfera de radio R , con una carga q distribuida uniformemente en su volumen y que gira con velocidad angular ω .

Establezca la proporcionalidad entre este momento magnético y el momento angular de la esfera, si ésta posee una masa m distribuida uniformemente en el volumen.

2 Momento magnético

2.1 Antes de hacer ninguna cuenta

Podemos obtener bastante información de cuál va a ser el resultado sin necesidad de hacer integral alguna., simplemente analizando las dimensiones y simetrías del problema.

- Sabemos que el resultado es un [momento dipolar](#) y por tanto debe tener las dimensiones de una intensidad de corriente multiplicada por una superficie.
- Por otro lado, los únicos datos necesarios son la carga de la esfera, su radio, y la velocidad angular de rotación.
- Para conseguir una cantidad con dimensiones de intensidad debemos dividir una carga por un tiempo.
 - La carga la tenemos.
 - El tiempo lo podemos obtener del periodo de giro, inversamente proporcional a la velocidad angular.
 - Por ello, para obtener una corriente podemos usar $q / (T / 2\pi) = q\omega$.
- Para conseguir una superficie solo podemos elevar al cuadrado el radio de la esfera.
- Por tanto el momento magnético debe ser proporcional a

$$m \propto q\omega R^2$$

- Por otro lado, el momento magnético es un vector que debe tener una cierta dirección.
 - La esfera es un cuerpo simétrico, que no define ninguna dirección.
 - La única dirección disponible es la que señala la velocidad angular.
 - El sentido del momento magnético puede ser el mismo que el de ω o el opuesto.
- Por todo ello, el momento angular de esta esfera debe ser de la forma

$$\mathbf{m} = \alpha q R^2 \boldsymbol{\omega}$$

Siendo α una cantidad adimensional (un número) con signo, cuyo valor sí debe determinarse mediante cálculo integral

Obsérvese que en ningún momento se usa el que la distribución sea volumétrica; solo el que es simétrica en la esfera. En el caso de una carga distribuida uniformemente sobre la superficie, el razonamiento sigue siendo válido. Lo único que varía es el valor de α .

2.2 Cálculo del momento

Para calcular el momento dipolar magnético de una distribución de corriente de volumen debemos hallar la integral vectorial

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J} d\tau'$$

siendo el volumen de integración aquél en que hay corriente. En nuestro caso, se trata de la esfera de radio R . Por ello usaremos coordenadas esféricas para realizar el cálculo.

La densidad de corriente en el caso de que tengamos una distribución de carga que se mueve rígidamente es

$$\mathbf{J} = \rho_0 \mathbf{v} \quad \rho_0 = \frac{q}{4\pi R^3/3}$$

La velocidad de los puntos de la esfera corresponde a una rotación pura

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}'$$

Si tomamos como eje Z el marcado por la velocidad angular nos queda la densidad de corriente

$$\mathbf{w} = w \mathbf{u}_z \quad \mathbf{r}' = r' \mathbf{u}_{r'} \quad \mathbf{J} = \rho_0 w r' \sin \theta' \mathbf{u}_{\varphi'}$$

El último producto vectorial puede obtenerse usando las [relaciones entre las bases vectoriales](#) o la propia definición de producto vectorial como un vector cuyo módulo es el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman (que es θ , por definición de esta coordenada), y con una dirección ortogonal a ambos.

Llevando esto a la integral nos queda el integrando

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{J} = -\rho_0 w r'^2 \sin \theta' \mathbf{u}_{\theta'}$$

y nos queda el momento magnético

$$\mathbf{m} = -\frac{\rho_0 w}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (r'^2 \sin \theta' \mathbf{u}_{\theta'}) r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

Esta es una integral vectorial, por lo que hay que tener mucho cuidado con la base vdectorial empleada, ya que

Los vectores de la base dependen de la posición

Por ello, pasamos este vector a la [base cartesiana](#)

$$\mathbf{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \mathbf{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{u}_y - \sin\theta \mathbf{u}_z$$

y la integral se puede descomponer en esta base

$$\mathbf{m} = m_x \mathbf{u}_x + m_y \mathbf{u}_y + m_z \mathbf{u}_z$$

con

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{\rho_0 w}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r'^4 \sin^2\theta' \cos\theta' \cos\varphi' dr' d\theta' d\varphi' \\ m_y &= -\frac{\rho_0 w}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r'^4 \sin^2\theta' \cos\theta' \sin\varphi' dr' d\theta' d\varphi' \\ m_z &= \frac{\rho_0 w}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r'^4 \sin^3\theta' dr' d\theta' d\varphi' \end{aligned}$$

las dos primeras integrales se anulan ya que

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi' = 0$$

La tercera componente se convierte en un producto de tres integrales independientes

$$m_z = \frac{\rho_0 w}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin^3\theta' d\theta' \int_0^R r'^4 dr' = \frac{\rho_0 w}{2} (2\pi) \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{R^5}{5}\right)$$

Simplificando nos queda el momento dipolar magnético

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi\rho_0 w R^5}{15} \mathbf{u}_z = \frac{qR^2}{5} \mathbf{w}$$

1 Enunciado

Una partícula de masa m y carga q se mueve en el interior de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{u}_z$. Si la partícula se halla inicialmente en el origen y moviéndose con velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$. ¿Cuál es la trayectoria posterior? ¿Cuál es la posición en un instante de tiempo t ?

2 Introducción

Este problema trata simplemente de aplicar la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, a la ley de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Si sólo tenemos presente un campo magnético la ecuación de movimiento a resolver se reduce a

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Para resolver esta ecuación consideraremos en primer lugar dos casos particulares:

3 Caso de una velocidad inicial paralela al campo magnético

Si la velocidad inicial es paralela al campo magnético, la fuerza en el instante inicial es

$$\mathbf{F}(t = 0) = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Por tanto, la aceleración inicial es nula y \mathbf{v} un instante posterior seguirá siendo \mathbf{v}_0 . Extendiendo este razonamiento a todos los instantes posteriores resulta

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$$

esto es, si la velocidad inicial es paralela a \mathbf{B} , esta velocidad permanece constante. La partícula describe un movimiento rectilíneo y uniforme paralelamente al campo magnético. La posición en un instante cualquiera será

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$$

4 Caso de una velocidad inicial perpendicular al campo magnético

Si la velocidad inicial es perpendicular al campo magnético, la fuerza inicial no será nula

$$\mathbf{F}(t = 0) = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$$

Sin embargo, por ser un producto vectorial en el que interviene \mathbf{B} , resulta una aceleración perpendicular al campo magnético. Esto hace que la velocidad en un instante posterior

$$\mathbf{v}(dt) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}dt$$

sea también perpendicular al campo magnético. Extendiendo el razonamiento, resulta que si la velocidad inicial es perpendicular al campo magnético, lo será en todo instante.

La partícula se mueve sobre un plano perpendicular al campo magnético.

Queda determinar el movimiento sobre dicho plano. Si descomponemos la aceleración en sus componentes normal y tangencial

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

La aceleración tangencial es la componente paralela a la velocidad, pero el segundo miembro es puramente normal a ella, por tanto

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{0}$$

Ello implica que

$$0 = a_t = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \Rightarrow |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_0| = \text{cte}$$

Por ser la fuerza de Lorentz puramente normal, la partícula se mueve con velocidad de módulo constante. Este resultado es general en cuanto a que no depende de si el campo magnético es uniforme o no. También puede expresarse en términos de la energía cinética

$$U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \text{cte}$$

La energía cinética de una carga en un campo magnético permanece constante. El campo magnético no realiza trabajo sobre ella.

Yendo ahora a la aceleración normal, su módulo es

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{q}{m}vB_0$$

De aquí se deduce que la partícula se mueve con radio de curvatura constante

$$R = \frac{mv_0}{qB_0}$$

Una trayectoria plana de radio constante es una *circunferencia*. El radio de esta circunferencia se denomina *radio de Larmor*.

La frecuencia de giro es independiente de la velocidad inicial

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB_0}{m}$$

Esta cantidad (conocida como *frecuencia ciclotrón*) permite identificar las partículas en los detectores de los aceleradores de partículas, donde estas trayectorias se observan habitualmente.

5 Caso de una velocidad inicial arbitraria

Supongamos ahora que la velocidad inicial no es ni paralela ni perpendicular a \mathbf{B} , sino que forma un cierto ángulo α con el campo magnético. En este caso, podemos descomponer el problema en suma de los dos casos anteriores. Para ello, escribimos la velocidad como una superposición de una velocidad paralela a \mathbf{B} (proyectando sobre esta dirección) y otra perpendicular (hallando el complementario)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \quad \mathbf{v}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2} \mathbf{B} \quad \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}$$

La fuerza de Lorentz, en términos de estas dos componentes, es

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$

ya que el producto de dos vectores paralelos se anula. La fuerza resultante es también perpendicular a \mathbf{B} . Por tanto

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$

El resultado final es una combinación de los que ya hemos visto: el movimiento paralelo al campo magnético es uniforme, mientras que el perpendicular es circular. La combinación de estos dos movimientos es uno *helicoidal*. El radio de esta hélice es

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB_0} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB_0}$$

mientras que el paso de rosca (altura que sube al dar una vuelta) es

$$b = v_{\parallel} T = v_0 \cos \alpha \left(\frac{2\pi m}{qB_0} \right) = \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{qB_0}$$

El sentido con el que se recorre la hélice depende del signo de la carga.

1 Enunciado

El campo eléctrico de una onda electromagnética plana es

$\vec{E}(y, t) = \vec{E}_0 \text{sen}(ky + \omega t)$, con $\vec{E}_0 = E_0 \vec{k}$ (E_0 es positivo). La frecuencia de la onda es $f = 40.0 \text{ MHz}$ y el valor máximo del campo eléctrico es $E_0 = 750 \text{ N/C}$.

1. ¿Cuál es la dirección y sentido de propagación de la onda?
2. ¿Cómo es el campo magnético de la onda?
3. ¿Cuánto vale la longitud de onda, el número de onda y el período de la onda?

2 Solución

2.1 Dirección y sentido de propagación

De la fase en la expresión del campo eléctrico vemos que la dirección de propagación de la onda es el eje Y y el sentido es el negativo del eje Y . Es decir, el vector unitario que indica la dirección y sentido de propagación de la onda es

$$\vec{u} = -\vec{j}$$

2.2 Campo magnético

Al ser una onda plana, el campo magnético ha de ser perpendicular al campo eléctrico y a la dirección de propagación. Como el enunciado nos dice que el campo es paralelo al vector \vec{k} y del apartado anterior sabemos que la dirección de propagación es la del eje Y , el campo magnético ha de ser de la forma

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \text{sen}(ky + \omega t)$$

con $\vec{B}_0 = B_{0x} \vec{i}$. El signo de B_{0x} se obtiene del hecho de que el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ ha de ser paralelo a \vec{u} . Entonces

$$\vec{E} \times \vec{B} \parallel \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = (E_0 \vec{k}) \times (B_{0x} \vec{i}) = E_0 B_{0x} \vec{j}$$

Debe cumplirse $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = -A \vec{j}$ con A positivo. Por tanto

$$B_{0x} = -B_0$$

con B_0 positivo. El campo magnético es

$$\vec{B} = (-B_0 \vec{i}) \text{sen}(ky + \omega t)$$

El módulo del campo magnético es

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 2.50 \mu\text{T}$$

2.3 Longitud de onda, número de onda y período

El período de la onda es

$$T = \frac{1}{f} = 2.50 \times 10^{-8} \text{ s}$$

La longitud de onda es

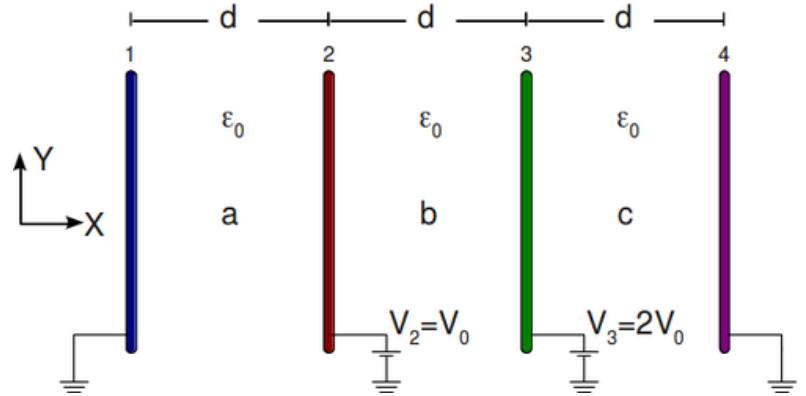
$$\lambda = \frac{c}{f} = 7.50 \text{ m}$$

Y el número de onda es

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.838 \text{ m}^{-1}$$

1 Enunciado

Se tienen cuatro placas conductoras iguales de superficie S dispuestas paralelamente como se indica en la figura. La distancia entre placas vecinas es la misma para todas ellas e igual a d . Las dos placas de los extremos están conectadas a tierra (potencial 0) mientras que las otras dos placas se conectan a los potenciales $V_2 = V_0$ y $V_3 = 2V_0$.



1. Calcula los campos eléctricos en las regiones entre placas, indicadas en la figura como a, b y c.
2. Calcula la carga total acumulada en las cuatro placas.
3. Se conectan las placas 2 y 3 con un hilo conductor. Calcula los nuevos valores de los campos y la carga de cada placa.

2 Solución

2.1 Campo entre placas

El campo generado por un plano infinito con una densidad uniforme de carga eléctrica es uniforme y perpendicular al plano. Cuando tenemos varios planos infinitos paralelos entre sí el campo en cada espacio entre planos es uniforme y perpendicular a ellos.

En este caso, el dato que nos dan es el potencial al que están los planos, no las densidades de carga en ellos. Por tanto determinamos el campo en cada región en función de la diferencia de potencial entre planos. El campo en cada región es

$$\vec{E} = \begin{cases} E_a \vec{i} & (a) \\ E_b \vec{i} & (b) \\ E_c \vec{i} & (c) \end{cases}$$

En la región la circulación del campo a lo largo de una línea recta que una las placas 1 y 2 es igual a la diferencia de potencial eléctrico entre ellas. Tenemos

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 (E_a \vec{i}) \cdot (dx \vec{i}) = - \int_1^2 E_a dx = -E_a \int_1^2 dx = -E_a d$$

Por tanto, y aplicando un razonamiento similar en las tres regiones entre placas tenemos

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{V_2 - V_1}{d} \vec{i} & (a) \\ -\frac{V_3 - V_2}{d} \vec{i} & (b) \\ -\frac{V_4 - V_3}{d} \vec{i} & (c) \end{cases}$$

Según los datos del problema

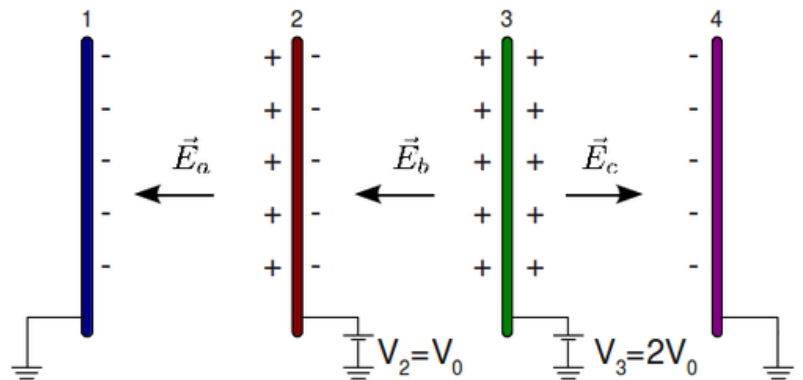
$$V_1 = 0, \quad V_2 = V_0, \quad V_3 = 2V_0, \quad V_4 = 0$$

Por tanto el campo en cada región es

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{V_0}{d} \vec{i} & (a) \\ -\frac{V_0}{d} \vec{i} & (b) \\ +\frac{2V_0}{d} \vec{i} & (c) \end{cases}$$

2.2 Carga en las placas

La figura muestra la orientación del campo en cada región suponiendo que V_0 es positiva. El campo va desde los potenciales altos hacia los bajos. También va desde las cargas positivas hacia las negativas. En la figura se indica el signo de la carga acumulada en cada una de las caras de las placas.



En cada cara la densidad superficial de carga es

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$$

La carga total en cada superficie es

$$q_{sup} = S \sigma = S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$$

donde \vec{n} es un vector normal a la superficie de la placa y que sale de ella. Según esto la carga en cada placa es la suma de la carga en su cara izquierda y la carga en su cara derecha. Tenemos

$$q_1 = q_{1i} + q_{1d} = 0 + S \epsilon_0 (E_a \vec{i}) \cdot (+\vec{i}) = S \epsilon_0 E_a = -\frac{\epsilon_0 S V_0}{d}$$

$$q_2 = q_{2i} + q_{2d} = S \epsilon_0 (E_a \vec{i}) \cdot (-\vec{i}) + S \epsilon_0 (E_b \vec{i}) \cdot (+\vec{i}) = -S \epsilon_0 E_a + S \epsilon_0 E_b = +\frac{\epsilon_0 S V_0}{d} - \frac{\epsilon_0 S V_0}{d} = 0$$

$$q_3 = q_{3i} + q_{3d} = S \epsilon_0 (E_b \vec{i}) \cdot (-\vec{i}) + S \epsilon_0 (E_c \vec{i}) \cdot (+\vec{i}) = -S \epsilon_0 E_b + S \epsilon_0 E_c = +\frac{\epsilon_0 S V_0}{d} + \frac{2 \epsilon_0 S V_0}{d} = \frac{3 \epsilon_0 S V_0}{d}$$

$$q_4 = q_{4i} + q_{4d} = S \epsilon_0 (E_c \vec{i}) \cdot (-\vec{i}) + 0 = -S \epsilon_0 E_c = -\frac{2 \epsilon_0 S V_0}{d}$$

Puede comprobarse que la suma total de todas las carga es cero, como debe ser pues las superficies cargadas están en influencia total dos a dos.

2.3 Conexión de las placas 2 y 3

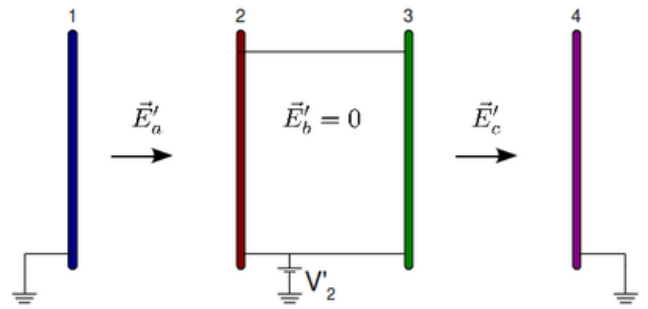
Al conectar las placas 2 y 3 las cargas presentes en ellas se redistribuyen, y también las cargas en las placas 1 y 2, pues están conectadas a tierra, que no es otra cosa que un conductor externo a potencial fijo.

El campo en la región b es ahora nulo, pues las placas 2 y 3 están al mismo potencial. Los datos que tenemos sobre el potencial y/o las cargas de las placas son

$$V'_1 = 0 \quad V'_4 = 0 \quad Q'_2 + Q'_3 = Q_2 + Q_3 = \frac{3 \epsilon_0 S V_0}{d}$$

No sabemos cual es el potencial V_2 del conductor 2+3, pero sabemos que tiene un valor fijado. Usando el mismo razonamiento que en el apartado 1, el campo en cada región es

$$\vec{E}' = \begin{cases} -\frac{V_2'}{d} \vec{i} & (a) \\ \vec{0} & (b) \\ \frac{V_2'}{d} \vec{i} & (c) \end{cases}$$



La carga total en el conductor 2+3 es la suma de la carga en la cara izquierda de la placa 2 y la derecha de la placa 3

$$Q'_{2+3} = S \varepsilon_0 (\vec{E}'_a \cdot (-\vec{i})) + S \varepsilon_0 (\vec{E}'_c \cdot (+\vec{i})) = S \varepsilon_0 (-E'_a + E'_c) = \frac{2 \varepsilon_0 S V_2'}{d}$$

Sabemos que esta carga debe ser igual a la que había en las placas 2 y 3 antes de la conexión. Es decir

$$Q_2 + Q_3 = Q'_2 + Q'_3 \implies \frac{3 \varepsilon_0 S V_0}{d} = \frac{2 \varepsilon_0 S V_2'}{d} \implies V_2' = \frac{3}{2} V_0$$

El campo es

$$\vec{E}' = \begin{cases} -\frac{3 V_0}{2 d} \vec{i} & (a) \\ \vec{0} & (b) \\ \frac{3 V_0}{2 d} \vec{i} & (c) \end{cases}$$

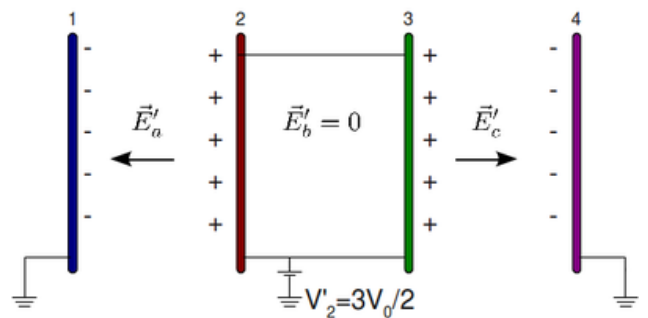
y las carga en cada placa

$$q'_1 = -\frac{3 S \varepsilon_0 V_0}{2 d}$$

$$q'_2 = \frac{3 S \varepsilon_0 V_0}{2 d}$$

$$q'_3 = \frac{3 S \varepsilon_0 V_0}{2 d}$$

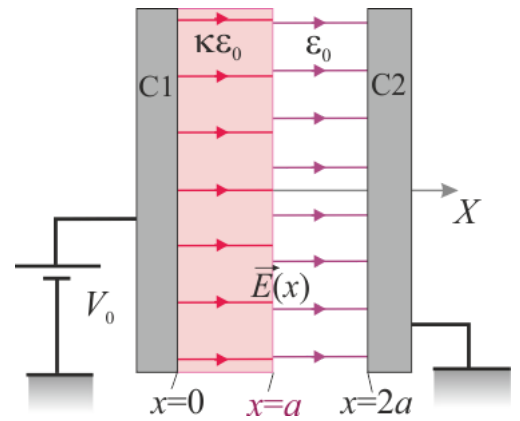
$$q'_4 = -\frac{3 S \varepsilon_0 V_0}{2 d}$$



La imagen de la derecha indica el sentido del campo en cada región y el signo de las cargas en cada placa, suponiendo que V_0 es positivo.

1 Enunciado

Dos cuerpos conductores, C_1 y C_2 , presentan sendas superficies planas, perpendiculares al eje Ox , que coinciden con los planos geométricos $\Pi_1: x = 0$ y con $\Pi_2: x = 2a$. La distancia de separación, $2a$, es significativamente menor que las dimensiones de los planos conductores. La región correspondiente a $0 < x < a$ está ocupada por un dieléctrico lineal de constante dieléctrica κ , mientras que la comprendida en el intervalo $a < x < 2a$ está rellena de aire. El conductor C_1 está conectado a un generador cuya f.e.m. tiene un valor constante V_0 , y el C_2 a tierra. Esta diferencia de potencial entre los conductores determina la presencia de un campo eléctrico en la región dieléctrica que los separa, y cuya expresión es:



$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{E_0}{\kappa} \vec{i}; & \text{si } 0 < x < a \\ E_0 \vec{i}; & \text{si } a < x < 2a \end{cases}$$

- ¿Cómo son las superficies equipotenciales entre los dos conductores? Indique de qué forma varía el valor del potencial de dichas superficies.
- ¿Qué relación existe entre los valores V_0 y E_0 ? Obtenga la función $V(x)$ que describe cómo es el valor del potencial en la región $0 \leq x \leq a$ (dieléctrico lineal), y en $a \leq x \leq 2a$ (aire).

2 Solución

Planteamiento

Toda distribución de cargas eléctricas estáticas produce una perturbación eléctrica en el espacio que puede ser descrita mediante sendos campos: el **campo eléctrico** $\vec{E}(\vec{r})$, de naturaleza vectorial; o el campo escalar **potencial electrostático** $V(\vec{r})$. La primera de estas magnitudes físicas se define como la fuerza eléctrica que por unidad de carga experimentaría una carga puntual situada en el punto P del espacio, determinado por el radiovector \vec{r} . Y puesto que dicha fuerza es conservativa, es posible definir la energía potencial electrostática de una carga puntual cuando se encuentra sometida a la acción de las cargas que crean la perturbación eléctrica analizada. El potencial electrostático $V(\vec{r})$ es la energía potencial que por unidad de carga tendría una carga puntual situada en el punto P , dado por el radio vector \vec{r} .

Ambas magnitudes físicas son dos formas de expresar los efectos producidos por una determinada distribución de carga, que se relacionan a partir de la definición de **diferencia de potencial**: los campos $\vec{E}(\vec{r})$ e $V(\vec{r})$ creado por una determinada distribución de carga eléctrica en un región del espacio son tales que la diferencia entre los valores del potencial entre dos puntos A y B de dicha región es igual a la circulación (o integral de camino) del campo eléctrico entre dichos puntos:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Y puesto que el campo eléctrico es una magnitud física, su módulo ha de ser una cantidad finita expresable mediante un número real. Por tanto, si consideramos dos puntos, P y P' , separados una distancia infinitesimal, entonces se cumplirá,

$$V(P') = V(P) + dV, \text{ tal que } dV = - \vec{E}(P) \cdot d\vec{r},$$

siendo $d\vec{r}$ el vector de módulo infinitesimal que determina la posición de P' , respecto de P . Este resultado permite identificar al vector campo eléctrico como el vector opuesto al gradiente del potencial electrostático en dicho punto. En terminos del operador nabla, se tendrá:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} [V(\vec{r})] = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Por tanto, el campo eléctrico en un punto es un vector que indica la dirección y el sentido en que se verifica la máxima disminución del valor del potencial, y cuyo módulo es la variación por unidad de longitud del potencial en el entorno de dicho punto. Por otra parte, si desde el punto P nos desplazamos a puntos infinitamente próximos situados en la misma superficie equipotencial, la variación del potencial va a ser nula; por tanto, en general se tendrá que **el campo eléctrico en P va a ser perpendicular al plano tangente a la superficie equipotencial en dicho punto.**

Para la resolución del ejercicio propuesto resulta especialmente interesante esta interpretación de campo eléctrico y potencial. Si se utilizan las coordenadas cartesianas para la descripción analítica del espacio, con el punto O como origen del sistema de referencia $OXYZ$, y de manera que para un punto P del espacio, se tendrá que:

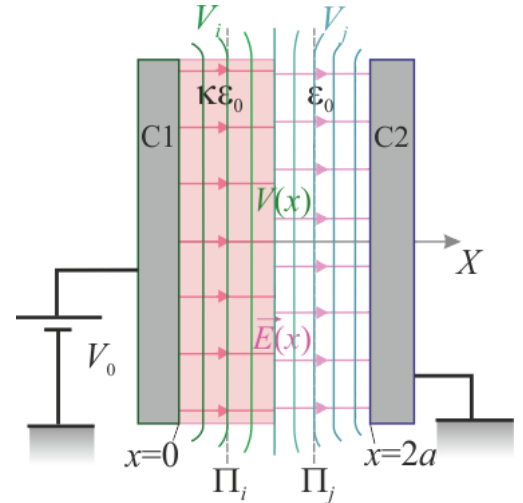
$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \implies \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}) = E_x(x, y, z)\vec{i} + E_y(x, y, z)\vec{j} + E_z(x, y, z)\vec{k} \\ V(\vec{r}) = V(x, y, z) \end{array} \right\}, \text{ tal que } \vec{E}(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}$$

2.1 Potencial electrostático y superficies equipotenciales

Como sabemos, las superficies conductoras en condiciones electrostáticas, son superficies equipotenciales. Es decir, al estar el conductor C_2 conectado a *tierra*, el potencial en todos los puntos de la superficie ∂C_2 tendrá el valor de referencia, que tomaremos como valor nulo. Por su parte, si el conductor C_1 está conectado al electrodo *activo* de un generador electrostático de f.e.m. V_0 , respecto del valor de referencia, todos los puntos de la superficie ∂C_1 estarán a aquél valor de potencial. En particular las superficies planas Π_1 y Π_2 de dichos conductores serán superficies equipotenciales con valores de potencial V_0 y 0 , respectivamente:

$$V(\vec{r})|_{\Pi_1} = V(x=0) = V_0; \quad V(\vec{r})|_{\Pi_2} = V(x=2a) = 0$$

Por otra parte, en el enunciado se informa de que en cualquier punto P situado entre ambos planos, el campo eléctrico tiene la dirección paralela al eje OX . Por tanto, las superficies equipotenciales van a ser los planos perpendiculares al vector unitario cartesiano \vec{i} , que son planos formados por puntos que tienen igual componente "x". La comprobación es sencilla: sea Π_i el plano formado por todos aquellos puntos con igual valor x_i en la coordenada "x". El vector desplazamiento entre dos puntos infinitamente próximos de dicho plano no va a tener componente en la dirección del eje OX ; por tanto, dicho vector será perpendicular al campo eléctrico en cualquiera de ellos, y no habrá variación del potencial entre ambos. En consecuencia, el potencial tendrá el mismo valor V_i en todos los puntos del plano Π_i :



$$P(x_i, y, z) \in \Pi_i : x = x_i, \text{ tal que } d\vec{r}|_{\Pi_i} = dy\vec{j} + dz\vec{k} \perp \vec{E}(P) \parallel \vec{i} \implies \left\{ \begin{array}{l} dV|_{\Pi_i} = -\vec{E}(P) \cdot d\vec{r}|_{\Pi_i} = 0 \\ V(x, y, z)|_{\Pi_i} = V(x = x_i) = V_i, \text{ cte.} \end{array} \right.$$

Es decir, las superficies equipotenciales en el sistema electrostático bajo estudio son cada uno de los planos Π_i paralelos a las superficies conductoras Π_1 y Π_2 , al menos en el espacio comprendido entre dichos planos, y tanto en la región rellena de dieléctrico lineal ($0 \leq x \leq a$), como en la de aire ($a \leq x \leq 2a$), como en la . Además, los valores del potencial en cada uno de estos planos disminuyen en la dirección y el sentido indicado por el campo eléctrico, desde el valor V_0 , hasta el valor 0 . Asumiendo que $E_0 > 0$, se tendrá:

$$\left. \begin{array}{l} V|_{\Pi_i} = V(x = x_i) = V_i \\ V|_{\Pi_j} = V(x = x_j) = V_j \end{array} \right\} \implies 0 \leq x_i < x_j \leq 2a \iff 0 \leq V_j < V_i \leq V_0$$

2.2 Expresión del potencial electrostático

Los resultados discutidos en el apartado anterior en relación con las superficies equipotenciales, pueden ser contrastados con la obtención de la expresión analítica correspondiente a la función del campo para el potencial electrostático, $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$, en los puntos $P(x, y, z)$ comprendidos entre los planos Π_1 y Π_2 . Utilizando la expresión del campo eléctrico como el vector opuesto al gradiente del potencial, obtenemos el conjunto de ecuaciones diferenciales que permiten determinar la función potencial electrostático:

$$0 \leq x \leq 2a; \quad \vec{E}(x, y, z) = E(x)\vec{i} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = -\vec{\nabla}V \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = -E(x) \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

En primer lugar, las anteriores ecuaciones diferenciales en derivadas parciales indican que en ambas regiones dieléctricas comprendidas entre las superficies conductoras Π_1 y Π_2 , el potencial electrostático es exclusivamente función de la coordenada "x".

$$\forall P(x, y, z), \text{ con } 0 \leq x \leq 2a \implies V(P) = V(x), \text{ tal que... } \left. \frac{dV}{dx} \right|_{P(x,y,z)} = -E(x) = \begin{cases} -\frac{E_0}{\kappa}, & \text{si } 0 < x < a \\ -E_0, & \text{si } a < x < 2a \end{cases}$$

Obsérvese que, en consecuencia, el valor del potencial será idéntico en todos los puntos que tenga igual valor en la coordenada cartesiana "x"; es decir, las superficies equipotenciales entre los conductores coincidirán con los planos cartesianos $\Pi_i : x = x_i$, constante. Por otra parte, la relación que deben verificar potencial y campo eléctrico establece que la derivada de la función potencial con respecto a la variable "x" presenta valores constantes distintos en las regiones de dieléctrico lineal y de aire. En cualquier caso, el potencial va a presentar un comportamiento lineal con respecto a dicha coordenada cartesiana, pero correspondiéndole funciones distintas en cada uno de esos medios:

$$\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{0 < x < a} = -\frac{E_0}{\kappa} \implies V(x) = -\int \frac{E_0}{\kappa} dx + A = -\frac{E_0}{\kappa} x + A, \text{ si } 0 \leq x \leq a$$

$$\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{a < x < 2a} = -E_0 \implies V(x) = -\int E_0 dx + B = -E_0 x + B, \text{ si } a \leq x \leq 2a$$

donde A y B son constantes a determinar, en función de la geometría y las propiedades eléctricas del sistema. Para ello, se exige que se verifiquen las condiciones de contorno impuestas en los planos conductores $\Pi_1 : x = 0$ y $\Pi_2 : x = 2a$,

$$\left. \begin{array}{l} V|_{\Pi_1} = V_0 \implies V(x=0) = A = V_0 \\ V|_{\Pi_2} = 0 \implies V(x=2a) = -2a E_0 + B = 0 \end{array} \right\} \implies V(x) = \begin{cases} -\frac{E_0}{\kappa} x + V_0, & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ -E_0 x + 2a E_0, & \text{si } a \leq x \leq 2a \end{cases}$$

Relación entre los valores E_0 y V_0

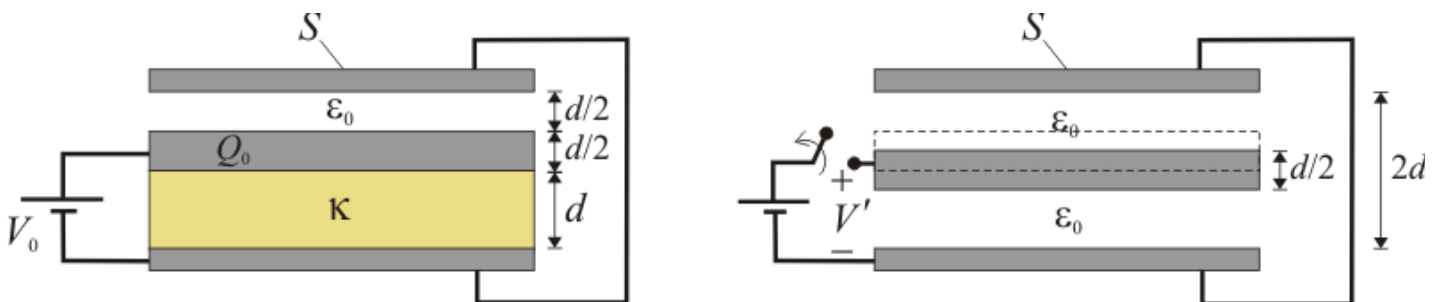
Para obtener dicha relación exigimos que se verifique una condición más: la condición de continuidad para el potencial en la interfaz dieléctrico-vacío localizada en el plano $\Pi_3 : x = a$,

$$\left. \begin{array}{l} V(x = a^-) = -\frac{E_0}{\kappa} a + V_0 \\ V(x = a^+) = E_0 a \end{array} \right\} V(x = a^-) = V(x = a^+) \implies V_0 = \left(\frac{1}{\kappa} + 1\right) E_0 a$$

1 Enunciado

Se tiene un sistema formado por tres discos conductores de igual sección S , con sus superficies planas dispuestas en planos paralelos. El disco intermedio tiene un espesor $d/2$ y está separado del disco inferior por una lámina de metacrilato de espesor d , cuya constante dieléctrica tiene un valor $\kappa \simeq 3$; una capa de aire de espesor $d/2$ lo separa del disco superior. El radio de los discos es considerablemente mayor que las distancias que los separan, de manera que podrán despreciarse los efectos de borde.

1. Determine las capacidades eléctricas de los dos condensadores formados por las superficies planas enfrentadas, en términos de los parámetros del sistema.
2. Si se conectan los dos discos externos mediante un hilo conductor, ¿qué tipo de asociación de condensadores se forma? ¿Cuánto vale la capacidad eléctrica equivalente?
3. En la situación del apartado anterior, determine la cantidad total de carga eléctrica en el conductor central cuando entre éste y los externos se establece una diferencia de potencial V_0 mediante un generador electrostático. Determine también las cantidades de carga eléctrica en cada una de las superficies planas de los conductores.
4. Tras desconectar el generador, dejando los discos aislados, se quita la lámina dieléctrica y, posteriormente, se desplaza el disco central de manera que sus superficies planas equidisten de los discos externos ¿Cuál será el valor V' de la diferencia de potencial entre los discos? Determine también la variación experimentada por la energía electrostática almacenada en el sistema.
5. Sabiendo que los campos máximos de ruptura dieléctrica del aire y del metacrilato son de 3 y 30 kV/mm, respectivamente, y considerando que $d = 1$ mm, determine cuál es el valor máximo que puede tener V_0 para que en ningún momento se produzca la ruptura dieléctrica.



2 Solución

2.1 Capacidad eléctrica de los condensadores

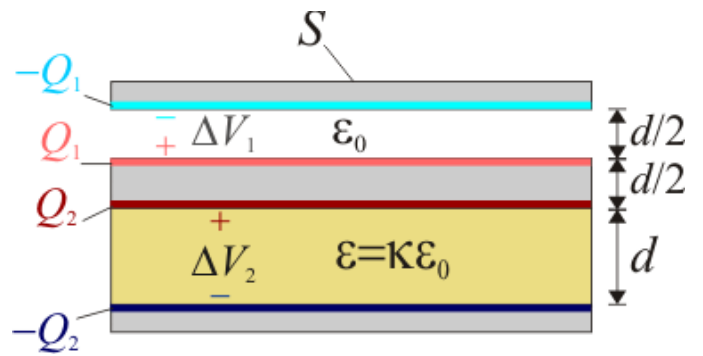
Asumimos que los diámetros de los discos son lo suficientemente grandes frente a las distancias que separan las placas para que las superficies conductoras se encuentren en influencia total, formando sendos *condensadores plano-paralelos*. Además, consideraremos que estas mismas características geométricas permiten despreciar los efectos de la acumulación de carga en los bordes de los conductores sobre la capacidad eléctrica de los condensadores. Por tanto, se tendrá:

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V_1} = \frac{\epsilon_0 S}{d/2}; \Rightarrow$$

$$C_1 = 2 \frac{\epsilon_0 S}{d} = 2C$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{\Delta V_2} = \kappa \frac{\epsilon_0 S}{d} \Rightarrow$$

$$C_2 \simeq 3 \frac{\epsilon_0 S}{d} = 3C$$



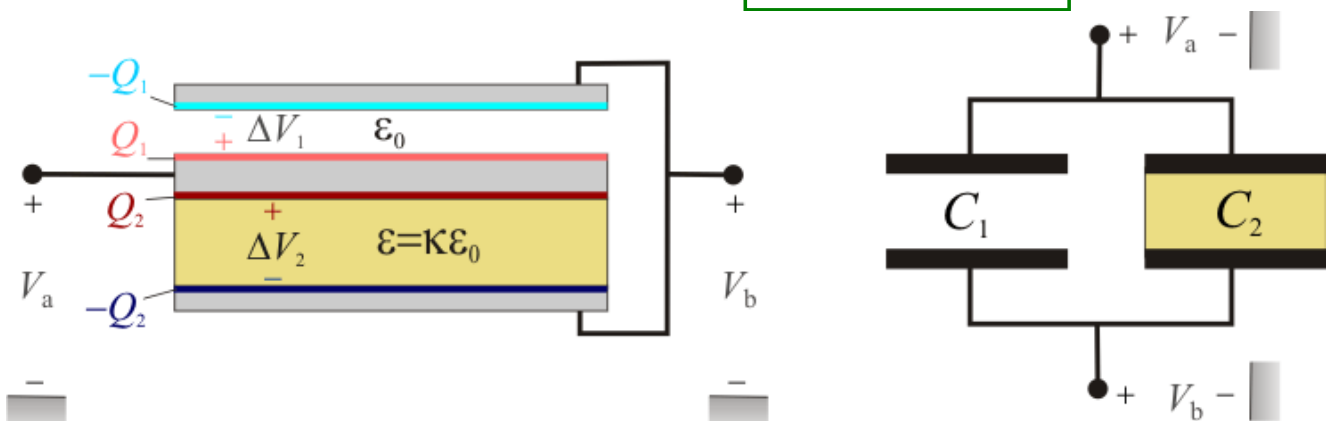
2.2 Asociación y capacidad equivalente

Si se conectan los discos exteriores mediante un cable conductor, aquéllos estarán al mismo valor V_b de potencial electrostático y, por tanto, las caras internas de dichos discos son equipotenciales. En consecuencia, si el disco interior se encuentra a un valor de potencial V_a , las diferencias de potencial ΔV_1 y ΔV_2 existentes entre superficies que se encuentran en influencia total, formando los respectivos condensadores C_1 y C_2 , estarán serán iguales:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_a - V_b$$

Es decir, dichos condensadores están asociados en paralelo, de forma que la capacidad equivalente de la asociación será:

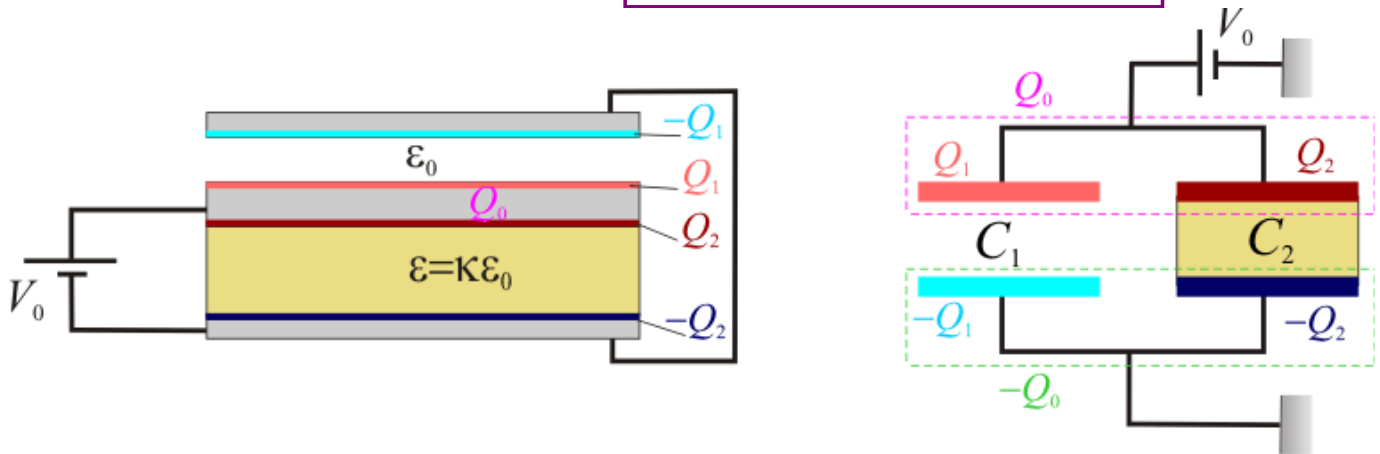
$$C_{\text{eq}} = \frac{Q_1 + Q_2}{V_a - V_b} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{\text{eq}} = 5C = 5 \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



2.3 Carga eléctrica en los conductores

Se procede a conectar un generador electrostático que establece una diferencia de potencial fija V_0 entre el disco interior y los discos exteriores equipotenciales. La cantidad total de carga Q_0 que de almacena en el disco interior será igual a la suma de las que haya en cada una de sus caras, de manera que:

$$\frac{Q_0}{V_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{V_0} = C_{\text{eq}} \Rightarrow Q_0 = C_{\text{eq}} V_0 = 5 \frac{\epsilon_0 S}{d} V_0 = 5 C V_0$$



Las cantidades parciales de carga Q_1 y Q_2 que se almacenan en cada una de las caras del conductor central también estarán determinadas por la diferencia de potencial V_0 existente entre las superficies en influencia total de ambos condensadores:

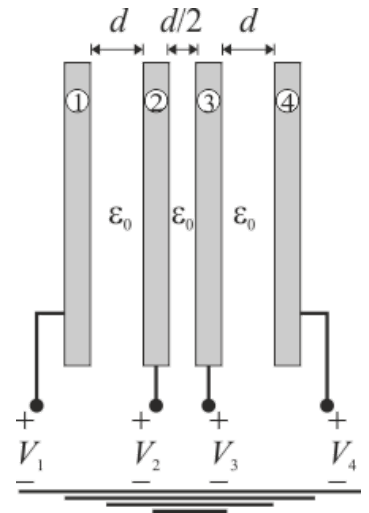
$$Q_1 = C_1 V_0 = 2 C V_0$$

$$Q_2 = C_2 V_0 = 3 C V_0$$

1 Enunciado

Un sistema de conductores está formado por cuatro discos metálicos idénticos, de sección S , colocados con sus respectivas superficies en planos paralelos y con sus centros en el mismo eje perpendicular a los discos. Las superficies enfrentadas de los dos discos centrales, "2" y "3", están separadas una distancia $d/2$, mientras que sus otras superficies se mantienen a una distancia d de las de los discos "1" y "4", colocados en los extremos del sistema. El valor de d es lo suficientemente pequeño frente al diámetro y grosor de los discos como para poder considerar que cada par de superficies conductoras enfrentadas se encuentran en influencia total, formando así un condensador plano paralelo relleno de aire.

1. Obtenga las expresiones para la carga eléctrica total en cada uno de los discos en función de los parámetros geométricos y de los valores del potencial electrostático en los discos.
2. Los discos "1" y "3" se conectan mediante un cable conductor ideal, formando el conductor "A", e igualmente se hace con "2" y "4" para formar el "B". Justifique por qué los conductores surgidos de estas asociaciones forman un condensador y calcule su capacidad eléctrica equivalente.
3. Considere el caso concreto en que el radio de los discos es de $R = 36 \text{ mm}$ y la distancia $d = 0.4 \text{ mm}$. Sabiendo que la ruptura dieléctrica del aire se produce para una intensidad de campo eléctrico $E_{\text{rup}}^{\text{air}} = 3 \text{ kV/mm}$, determine la diferencia de potencial máxima, V_{max} , que puede establecerse entre los conductores "A" y "B".



Calcule también la energía máxima que puede almacenarse en el sistema.

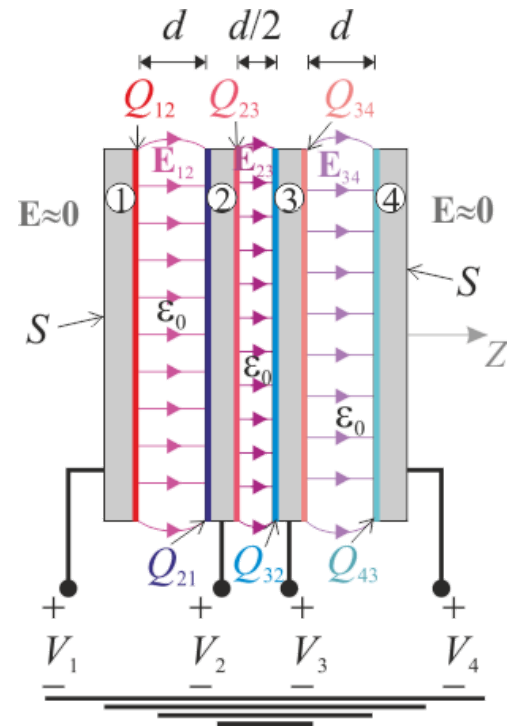
- ¿Entre qué conductores se produce la ruptura cuando se supera el valor V_{max} ?
4. Si entre los conductores "2" y "3" se introduce una lámina de porcelana, de constante dieléctrica $\kappa = 7$ y campo de ruptura $E_{\text{rup}}^{\text{por}} = 5.7 \text{ kV/mm}$, ¿cuál será el valor de V_{max} y entre qué conductores se producirá la ruptura si se supera dicho valor? ¿Cuánto vale ahora la capacidad eléctrica del sistema?

2 Solución

A modo de introducción, repasaremos los conceptos fundamentales a tener en cuenta en el planteamiento y análisis del sistema bajo estudio. Consideremos que los cuatro disco conductores del sistema descrito se hallan a sendos valores arbitrarios de potencial electrostático V_1, V_2, V_3 y V_4 , tomando como valor de referencia el que existe en puntos muy alejados del sistema (infinito). Como se sabe, cada disco constituye una región equipotencial y en el caso general de que estos valores sean distintos entre sí, se tendrá que entre los discos existen diferencias de potencial y, por tanto, un campo eléctrico que en cada punto coincide con el vector opuesto al gradiente de aquel campo escalar.

En el enunciado se indica que las distancias que separan a cada par de discos contiguos son mucho menores que las dimensiones de los discos (diámetro y grosor). Esto da lugar a que el módulo del gradiente del potencial (variación del potencial por unidad de longitud) en el espacio dieléctrico (aire) que existe entre cada par de discos contiguos sea mucho mayor que el que existe entre cada disco y el infinito. Esto es lo mismo que decir que el campo eléctrico en el sistema descrito sólo va a tener valores significativos en dichos espacios entre discos, siendo prácticamente nulo en la región exterior que rodea al sistema. Por otra parte, cuando éste se halla en equilibrio electrostático, el campo eléctrico en el interior de cada disco es estrictamente nulo, así como la densidad volumétrica de carga eléctrica neta. Sin embargo, puede haber carga eléctrica distribuida en las superficies de los discos conductores, la cuál estará necesariamente asociada a la existencia de una discontinuidad del campo eléctrico.

Obsérvese que, en virtud de la discusión que hemos realizado acerca de cómo se distribuye el campo eléctrico, en el sistema bajo estudio dicha discontinuidad se produce en las superficies o caras de cada uno de los discos que estén enfrentadas a otro disco contiguo; por el contrario, en las caras exteriores de los discos numerados como "1" y "4", no hay tal discontinuidad y, en consecuencia, no habrá carga eléctrica superficial. Además, si asumimos que en la región exterior al sistema no hay campo eléctrico apreciable, todas las líneas de campo eléctrico que partan de una de las caras planas de un disco conductor habrán de terminar en la cara del disco contiguo que se encuentra frente a aquélla. Es decir, cada par de caras o superficies conductoras enfrentadas, separadas por aire y pertenecientes a discos contiguos, se encuentran en *influencia total* formando, por tanto, un **condensador eléctrico**. En consecuencia, dichas superficies conductoras almacenarán cantidades opuestas de carga eléctrica, de manera que si denominamos Q_{ij} a la cantidad de carga eléctrica distribuida en la cara plana del disco i que se encuentra frente al disco j , se cumplirán las relaciones:

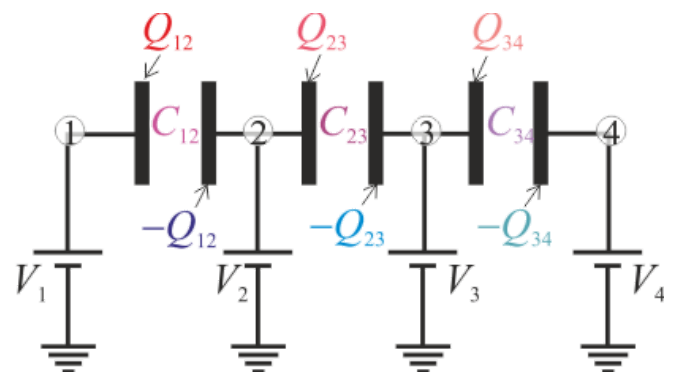


$$Q_{ij} = -Q_{ji} \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = i + 1)$$

Cada condensador está caracterizado por su correspondiente capacidad eléctrica, que se define como la relación entre la carga almacenada en una de los superficies o caras conductoras que lo constituyen, y la diferencia de potencial entre ambos conductores:

$$C_{ij} = \frac{Q_{ij}}{V_i - V_j} = \frac{Q_{ji}}{V_j - V_i}$$

Además, esta magnitud depende exclusivamente de la geometría del condensador y del medio dieléctrico que separa a los conductores. Como hemos visto, en el sistema bajo estudio tendremos tres condensadores formados, cada uno de ellos, por dos superficies conductoras planas y paralelas muy próximas entre sí. Asumiendo que podemos aplicar la aproximación del condensador plano-paralelo, en el cuál la distribución de carga en cada superficie conductora es uniforme (se desprecian los efectos de borde), así como el campo eléctrico en el espacio dieléctrico, las capacidades de estos condensadores serán proporcionales a las áreas de las superficies conductoras e inversamente proporcionales a las distancias que las separan, siendo la constante de proporcionalidad igual a la permitividad dieléctrica del aire (que consideraremos igual a la del vacío). Se tendrá, por tanto:



$$C_{12} = \frac{Q_{12}}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d}; \quad C_{23} = \frac{Q_{23}}{V_2 - V_3} = \frac{\epsilon_0 S}{d/2}; \quad C_{34} = \frac{Q_{34}}{V_3 - V_4} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Nótese que los condensadores de capacidades C_{12} y C_{23} siempre están conectados ya que ambos comparten el disco conductor "2", y aunque les corresponden superficies conductoras distintas de éste, siempre serán equipotenciales. Sin embargo, esto no implica que estén conectados en serie, pues no se indica que dicho disco conductor se encuentre aislado y descargado. Esta misma situación se verifica en el caso del disco "3" y los condensadores C_{23} y C_{34} .

Por otra parte, la aproximación del condensador plano-paralelo tiene como consecuencia que el campo eléctrico entre cada par de discos contiguos sea prácticamente uniforme; es decir, constante en módulo, sentido y dirección, siendo ésta perpendicular a las superficies planas de los discos. Sea \mathbf{E}_{ij} el vector del campo eléctrico existente en la región dieléctrica (aire en nuestro caso) que separa el disco i del contiguo j , se tendrá:

$$\mathbf{E}_{ij} = E_{ij} \mathbf{k}, \text{ cte. } (i = 1, 2, 3; j = i + 1)$$

Obtengamos el valor de la componente E_{ij} , constante entre cada par de discos, en términos de la diferencia de potencial entre éstos:

$$V_i - V_j = \int_{C_i}^{C_j} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_{ij} \int_{z_i}^{z_j} dz \implies E_{ij} = \frac{V_i - V_j}{d_{ij}}$$

siendo d_{ij} la distancia que los separa o, lo que es lo mismo, el espesor del medio dieléctrico existente entre las superficies conductoras enfrentadas y en influencia total.

2.1 Carga eléctrica en cada disco

A partir del análisis realizado en el anterior preámbulo, la resolución de los diferentes apartados del ejercicio es casi inmediata. En primer lugar se solicita la cantidad total de carga que habrá almacenada en cada uno de los cuatro discos conductores, en función del potencial a que se encuentren como resultado, por ejemplo, de que éstos se hallen conectados a sendas fuentes que fijan valores constantes de potencial. La carga total en cada disco será igual a la suma de las cargas distribuidas en su superficie.

Si denominamos Q_i a la cantidad total de carga en el disco i -ésimo, y teniendo en cuenta la discusión previa, se tendrá que

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_{12} = C_{12} (V_1 - V_2) \\ Q_2 &= Q_{21} + Q_{23} = -C_{12} (V_1 - V_2) + C_{23} (V_2 - V_3) \\ Q_3 &= Q_{32} + Q_{34} = -C_{23} (V_2 - V_3) + C_{34} (V_3 - V_4) \\ Q_4 &= Q_{43} = -C_{34} (V_3 - V_4) \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} Q_1 &= C (V_1 - V_2) \\ Q_2 &= C (-V_1 + 3V_2 - 2V_3) \\ Q_3 &= C (-2V_2 + 3V_3 - V_4) \\ Q_4 &= C (-V_3 + V_4) \end{aligned}$$

donde C es el parámetro característico del sistema, con dimensiones de capacidad eléctrica, que depende de la geometría del mismo:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = C_{12} = \frac{C_{23}}{2} = C_{34},$$

2.2 Conexión de los discos. Condensador equivalente

Se procede ahora a conectar los discos "1" y "3" mediante un cable conductor, de manera que constituyan una región equipotencial que denominaremos "A"; también se realiza idéntica operación con los discos conductores "2" y "4", para crear la región equipotencial "B".

Obsérvese que el sistema de conductores resultante puede considerarse como un caso particular de la configuración general analizada en el preámbulo y el apartado anterior. Se trataría de la situación en la cuál los valores del potencial de los cuatro discos verifican las siguientes relaciones:

$$V'_1 = V'_3 = V_A, \quad V'_2 = V'_4 = V_B$$

Si, en general, los valores de potencial V_A y V_B son distintos, entre cada par de discos contiguos habrá una diferencia de potencial no nula y, en consecuencia, existirá campo eléctrico en la regiones de aire localizadas entre aquéllos. Como se discutió anteriormente, esto determinará la presencia de distribuciones superficiales de carga en aquellas caras de cada disco conductor que se encuentren enfrentadas a otro disco. Además, como la geometría del sistema no ha cambiado, se seguirá verificando que el campo eléctrico en la región exterior al sistema de conductores es prácticamente nulo, por lo que las caras externas de los discos "1" y "4" seguirán descargadas. También se seguirá cumpliendo que cada par de caras enfrentadas de discos contiguos se encontrarán en influencia total, de manera que almacenarán cantidades opuestas de carga eléctrica superficial:

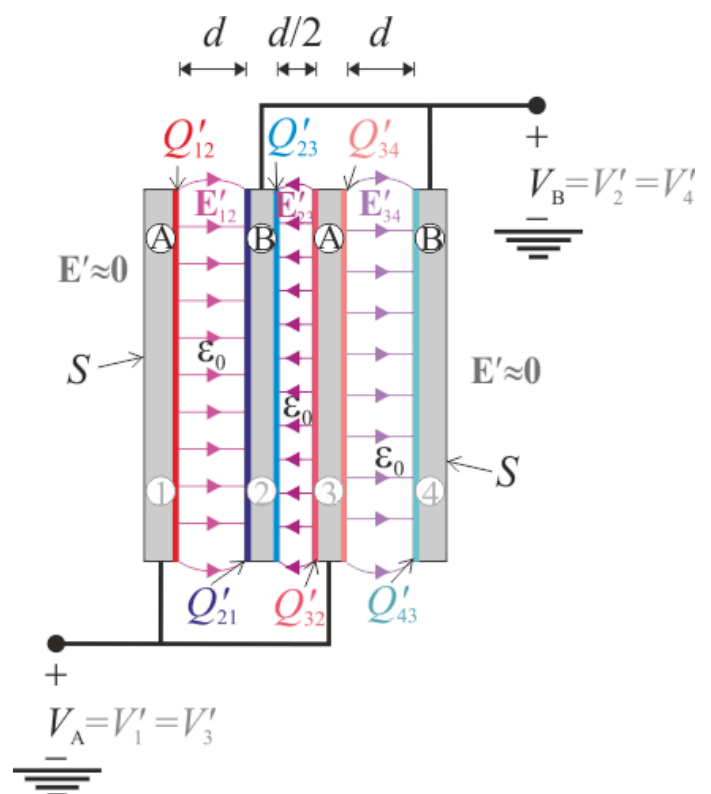
$$Q'_{ij} = -Q'_{ji} \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = i + 1)$$

Y como las secciones de los discos no han cambiado, ni el espesor de las capas de aire que los separan, estas nuevas cantidades de carga y la diferencia de potencial entre los discos seguirán verificando la misma relación que antes de proceder a la conexión de los discos; es decir:

$$C_{12} = \frac{Q'_{12}}{V'_1 - V'_2} = \frac{Q'_{12}}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$C_{23} = \frac{Q'_{23}}{V'_2 - V'_3} = \frac{Q'_{23}}{V_B - V_A} = 2 \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$C_{34} = \frac{Q'_{34}}{V'_3 - V'_4} = \frac{Q'_{34}}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



Pero analicemos el sistema considerándolo formado por dos regiones conductoras, "A" y "B", separadas por aire. Si despreciamos la cantidad de carga eléctrica que pudiera almacenarse en los cables de conexión, se tendrá que las

cantidades totales de carga eléctrica, Q_A y Q_B , distribuidas en dichas regiones serán iguales a la suma de las cargas superficiales que hay en los correspondientes discos que las forman. Y teniendo en cuenta la propiedad descrita anteriormente de que las cargas en superficies enfrentadas son opuestas, se obtiene:

$$Q_A = Q'_{12} + Q'_{32} + Q'_{34} = -Q'_{21} - Q'_{23} - Q'_{43} = -Q_B$$

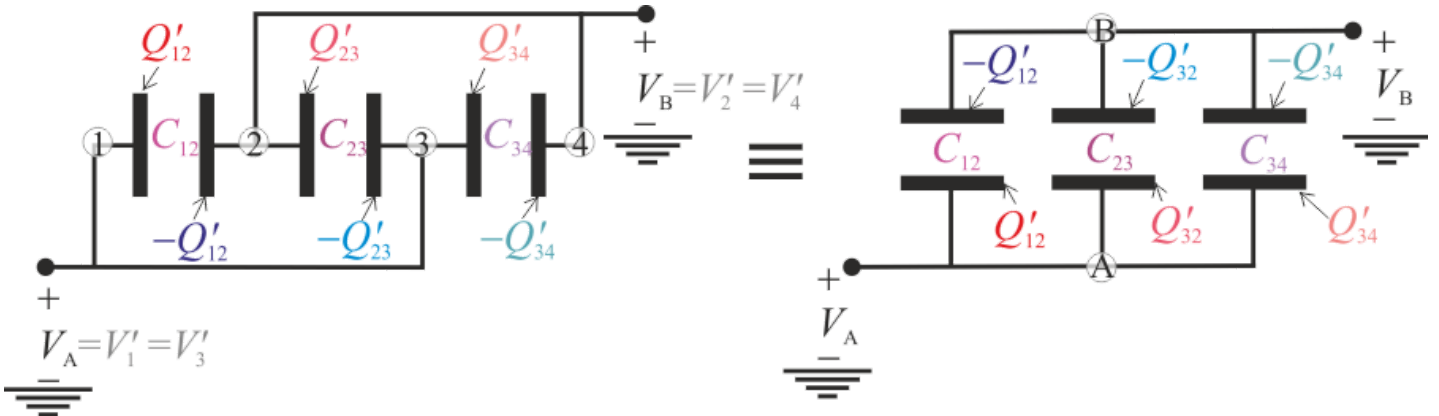
Es decir, las regiones conductoras "A" y "B" creadas al conectar los discos **almacenan cantidades opuestas de carga**. Esto está directamente relacionado con que dichas regiones conductoras **se hallan en influencia total** pues, como justificamos anteriormente, toda línea de campo eléctrico que parte de la región "A" (discos "1" y "3") ha de terminar necesariamente en algún punto de la región "B" (discos "2" y "4"). Por tanto, los conductores "A" y "B", separados por un dieléctrico (aire), **constituyen un condensador** cuya capacidad eléctrica es igual a la relación entre la carga almacenada en una de las regiones conductoras, y su diferencia de potencial con la otra:

$$C_{AB} = \frac{Q_A}{V_A - V_B} = \frac{Q_B}{V_B - V_A}$$

El valor de este parámetro debe depender exclusivamente de la geometría del sistema. Para obtenerlo, no tenemos más que determinar el valor de la carga en el conductor "A" en función de la diferencia de potencial de éste con el "B"; utilizando resultados anteriores:

$$Q_A = Q'_{12} + Q'_{32} + Q'_{34} = (C_{12} + C_{23} + C_{34}) (V_A - V_B) \Rightarrow C_{AB} = C_{12} + C_{23} + C_{34} = 4 \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Obsérvese este resultado nos permite extraer la conclusión de que el sistema de conductores que se obtiene al conectar los discos es un condensador eléctrico equivalente a la **asociación en paralelo** de los tres condensadores que forman los pares de superficies conductoras enfrentadas.

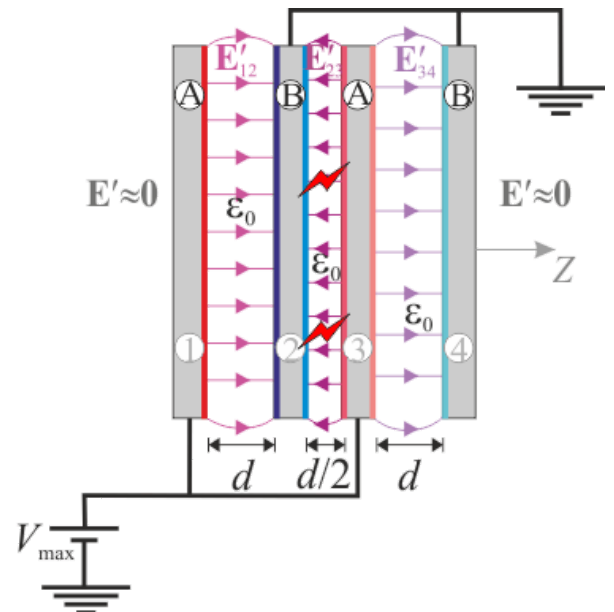


2.3 Diferencia de potencial máxima entre conductores

Una vez establecidas las conexiones entre los discos "1-3" y "2-4" para configurar las regiones conductoras "A" y "B", los campos eléctricos entre pares cada par de discos contiguos, expresados en términos de la diferencia de potencial entre dichas regiones, serán de la forma:

$$\mathbf{E}'_{12} = \frac{V'_1 - V'_2}{d} = \frac{V_A - V_B}{d} \mathbf{k}; \quad \mathbf{E}'_{23} = \frac{V'_2 - V'_3}{d/2} = \frac{2(V_B - V_A)}{d} \mathbf{k}; \quad \mathbf{E}'_{34} = \frac{V'_3 - V'_4}{d} = \frac{V_A - V_B}{d}$$

Pero si los espacios interdiscos estén rellenos por un medio material dieléctrico, como es el caso, los módulos o intensidad de dichos campos no pueden superar un valor crítico E_{rup} , por encima del cuál se produce la ruptura dieléctrica del medio. Como los tres medios son aire, se tendrá:



$$|\mathbf{E}'_{12}|, |\mathbf{E}'_{23}|, |\mathbf{E}'_{34}| < E_{rup}^{air} \iff |V_A - V_B| < \frac{d}{2} E_{rup}^{air} < d E_{rup}^{air}$$

Y teniendo en cuenta el valor del campo de ruptura del aire y del parámetro d , se obtiene las diferencia de potencial máxima que puede existir entre los conductores "A" y "B":

$$V_{max} = \frac{d}{2} E_{rup}^{air} = 600 \text{ V}$$

Un valor igual o superior a éste provocaría, en primer lugar, la ruptura dieléctrica ente los discos "2" y "3".

La energía electrostática almacenada en un sistema de conductores y dieléctricos es igual a la semisuma del producto de las cargas almacenadas multiplicadas por el valor de los potenciales. En el sistema bajo estudio, y tras realizar la conexión de los discos, se tendrá:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 Q_i V_i \quad \rightarrow \quad U_e = \frac{1}{2} (Q_A V_A + Q_B V_B) = \frac{1}{2} C_{AB} (V_A - V_B)^2$$

En consecuencia, la existencia de un valor máximo para la diferencia de potencial entre los conductores "A" y "B" tendrá como consecuencia una limitación en la cantidad de energía electrostática que puede almacenarse en el sistema. Sustituyendo los valores de d , ϵ_0 , y del radio de los discos para determinar su sección S , se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \text{ pF/mm} \\ S = \pi R^2 = 36^2 \pi \text{ mm}^2 \end{array} \right\} \rightarrow C_{AB} = 4 \frac{\epsilon_0 S}{d} = 360 \text{ pF} \quad \Rightarrow \quad U_{e|_{\max}} = \frac{1}{2} C_{AB} V_{\max}^2 = 64.8 \mu\text{J}$$

2.4 Efecto de la lámina de porcelana

En este último apartado se analizan los cambios que se produce en el sistema electrostático cuando en la configuración de conductores "A" y "B" se introduce una lámina dieléctrica de porcelana, cuya constante dieléctrica y campo de ruptura tienen los valores $\kappa = 7$ y $E_{\text{rup}}^{\text{por}} = 5.7 \text{ kV/mm}$.

En el nuevo sistema, las caras enfrentadas de cada par de discos contiguos siguen estando en influencia total formando, por tanto, tres condensadores planos paralelos. De hecho, los que se forman entre los discos "1" y "2", y "3" y "4", incluso mantienen los mismo valores de capacidad,

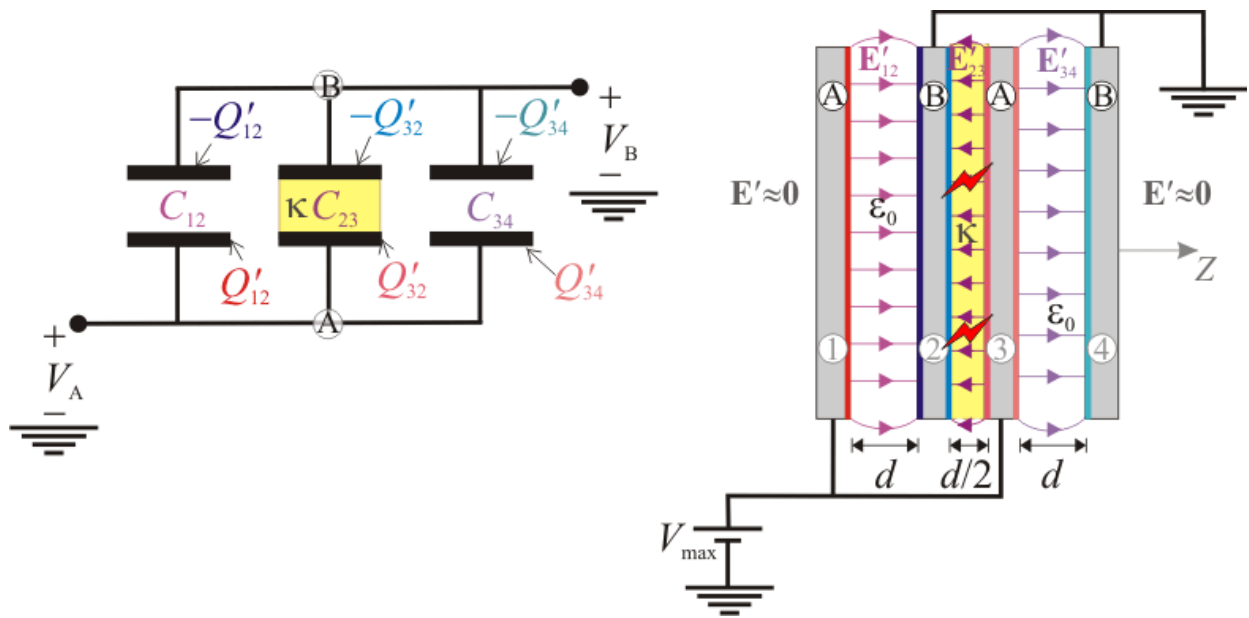
$$C_{12} = C_{34} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

pues siguen estando rellenos de aire y se mantienen el valor S del área tamaño de los discos y las distancias d de separación. Por el contrario, la introducción de la lámina de porcelana relleno el espacio de separación entre los discos "2" y "3", pero sin cambiar éstos ni la distancia que los separa, produce un cambio en la capacidad de este condensador, que resulta multiplicada por un factor κ :

$$C'_{23} = \kappa C_{23} = 2 \kappa \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Y como se mantienen conectados los discos "1" y "3", formando la región conductora "a", y los "2" y "4", para formar el conductor "B", éstas siguen constituyendo un condensador, equivalente a la conexión en paralelo de los tres condensadores planos paralelos descritos. Su capacidad eléctrica es:

$$C'_{AB} = C_{12} + \kappa C_{23} + C_{34} = 2(1 + \kappa) \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \Rightarrow \quad C'_{AB} = 16 \frac{\epsilon_0 S}{d} = 4 C_{AB} = 1.44 \text{ nF}$$



Analicemos ahora el efecto de la introducción de la lámina sobre el valor máximo de diferencia de potencial que se puede establecer entre los conductores "A" y "B". Recuérdese que en el anterior apartado dicha V_{\max} estaba determinada por la ruptura dieléctrica entre los discos más próximos entre sí: el "2" y el "3". Al introducir la porcelana entre ambos discos, aumentará el valor del campo de ruptura entre ellos y, en consecuencia, la diferencia de potencial máxima aplicable. Como entre los discos "1" y "2", así como entre "3" y "4", sigue habiendo aire, se deberán cumplir las siguientes relaciones simultáneamente:

$$|\mathbf{E}'_{12}| = |\mathbf{E}'_{34}| = \frac{|V_A - V_B|}{d} < E_{\text{rup}}^{\text{air}} \iff |V_A - V_B| < d E_{\text{rup}}^{\text{air}} = 1.2 \text{ kV}$$

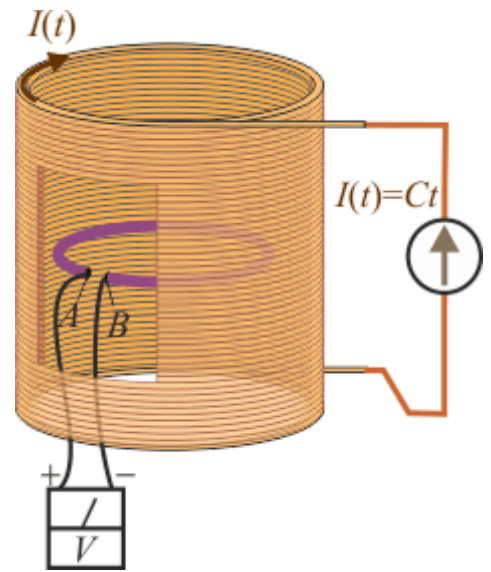
$$|\mathbf{E}'_{23}| = \frac{|V_A - V_B|}{d/2} < E_{\text{rup}}^{\text{por}} \iff |V_A - V_B| < \frac{d}{2} E_{\text{rup}}^{\text{por}} = 1.14 \text{ kV}$$

Es decir, a pesar de haber introducido la lámina de porcelana, sigue siendo la ruptura dieléctrica entre los discos "2" y "3" lo que condiciona el valor máximo de diferencia de potencial, si bien éste ha aumentado respecto del caso analizado en los anteriores apartados:

$$|V_A - V_B| < \frac{d}{2} E_{\text{rup}}^{\text{por}} < d E_{\text{rup}}^{\text{air}} \Rightarrow \boxed{V_{\max} = 1140 \text{ V}}$$

1 Enunciado

Un solenoide recto de forma cilíndrica y longitud l , mucho mayor que su radio, está formado por N espiras distribuidas de forma compacta que son recorridas en sentido horario por una corriente eléctrica que crece linealmente según la ley $I(t) = Ct$ (C , constante). En un plano paralelo a las espiras del solenoide y en el interior de éste, se encuentra una pequeña espira circular de radio a , menor que el del solenoide. Si a la espira le falta un pequeño trozo, de manera que constituye un circuito abierto, ¿cómo es la tensión $V = V_A - V_B$ que mediría un voltímetro conectado a sus extremos, tal como se indica en la figura?

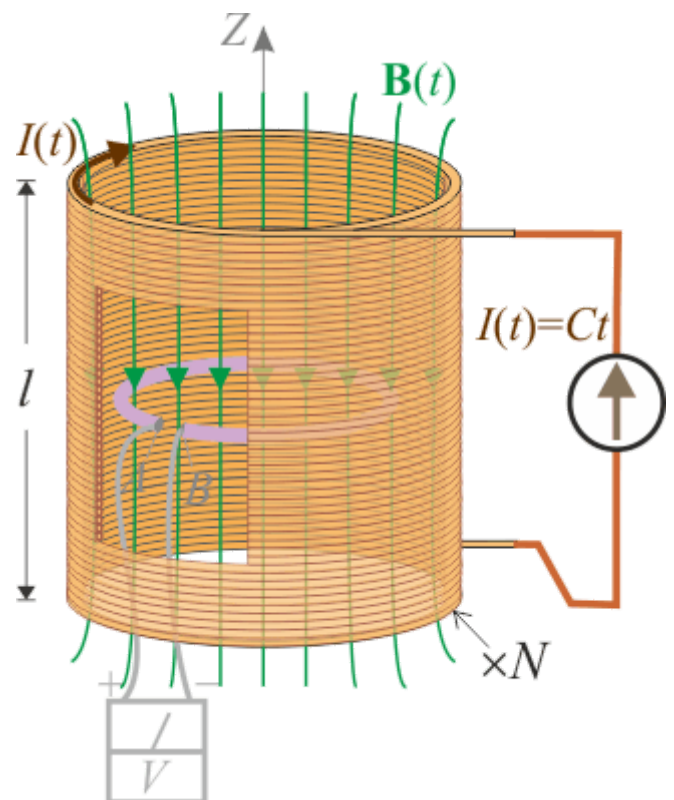


2 Solución

2.1 Campo magnético y flujo a través de la espira

Como la longitud del solenoide cilíndrico es mucho mayor que su radio, podemos considerar que la corriente eléctrica que lo recorre sólo produce un campo apreciable en el interior de la bobina. Además, puede considerarse con buen grado de aproximación que, salvo en las proximidades de los extremos, dicho campo es uniforme y paralelo al eje de la bobina.

Tomemos a éste como eje OZ de un sistema de referencia cartesiano, de manera que las espiras del solenoide se encuentren en planos paralelos al OXY y con la corriente eléctrica recorriéndolas en sentido horario. En



cualquier punto del interior de la bobina, suficientemente alejado de sus extremos, el campo magnético será de la forma:

$$\mathbf{B}(t) = -\mu_0 \frac{N}{l} I(t) \mathbf{k} \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(t) = B(t) \mathbf{k} = -\mu_0 \frac{N}{l} C t \mathbf{k}}$$

Por tanto, ésta es la expresión del campo magnético $\mathbf{B}(t)$, uniforme y variable en el tiempo, que existe en el entorno de la espira abierta localizada en el interior del solenoide.

Consideremos la circunferencia $\partial\Sigma$ coincidente con aquella y con el *gap* o discontinuidad que hay entre los extremos A y B . Como dicho salto es pequeño, el flujo magnético a través de la espira es igual al flujo del vector $\mathbf{B}(t)$ en cualquier superficie que se apoye en la circunferencia $\partial\Sigma$. Y puesto que el campo es perpendicular al plano que contiene a la espira, tomaremos como superficie Σ el círculo de radio a definido por la circunferencia $\partial\Sigma$. Se obtendrá, por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m|_{\text{esp}} &= \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ d\mathbf{S}|_{\Sigma} &= dS \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_m(t)|_{\text{esp}} = B(t) \int_{\Sigma} dS = -\mu_0 \frac{N}{l} \pi a^2 C t}$$

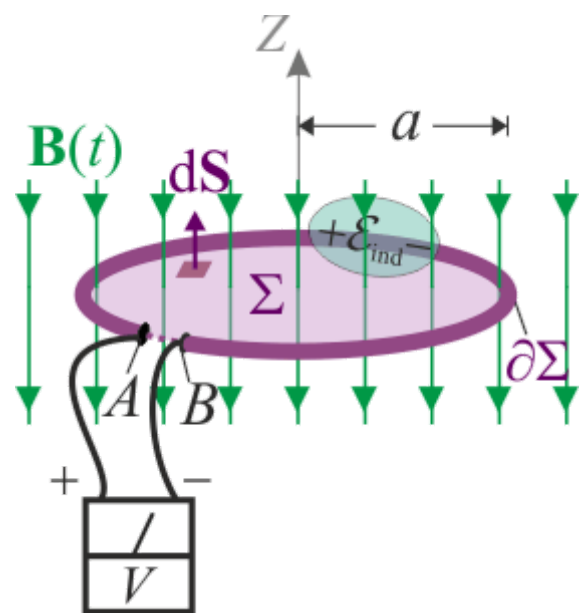
que, como puede comprobarse, se trata de un flujo magnético que crece linealmente en el tiempo.

2.2 Fuerza electromotriz inducida y tensión en el *gap*

En virtud de la ley de inducción, una variación temporal del flujo magnético a través de la espira da lugar a la aparición de una fuerza electromotriz inducida,

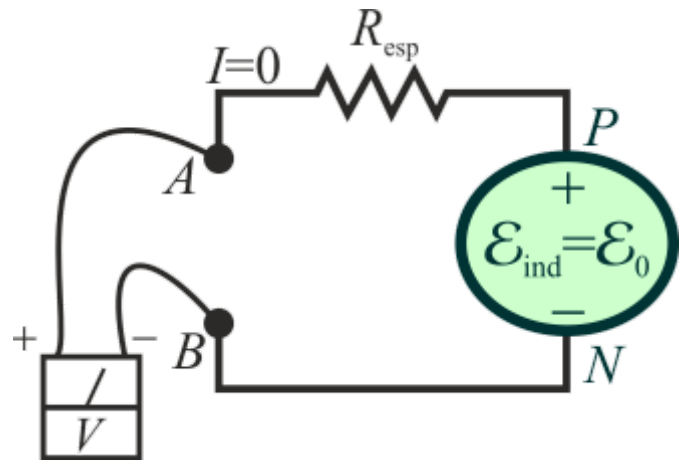
$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\text{esp}} = \mu_0 \frac{N}{l} \pi a^2 C = \mathcal{E}_0}$$

cuyo valor constante \mathcal{E}_0 depende de la característica C de la fuente de intensidad que alimenta a la bobina, y de los parámetros geométricos del sistema: N , l y a . Si la espira constituyese un circuito cerrado, dicha fuerza electromotriz induciría una corriente eléctrica. Obsérvese que, en virtud de la ley de Lenz, dicha corriente recorrería la espira en sentido antihorario, ya que



la elección del elemento de superficie $d\mathbf{S}$ en sentido opuesto al campo magnético, da lugar a un flujo negativo magnético cuyo valor absoluto crece en el tiempo. Sin embargo, al presentar la espira un corte o *gap* entre los puntos A y B , la intensidad de corriente es nula, induciéndose una tensión $V_A - V_B$ entre dichos puntos.

Para determinar la relación de ésta con la fuerza electromotriz inducida, construimos un modelo circuital para la espira abierta: consiste éste en un circuito abierto formado por una resistencia R_{esp} en serie con un generador ideal. Aquella modela la resistencia eléctrica del anillo conductor, mientras que la fuerza electromotriz del generador será igual a la \mathcal{E}_0 inducida por la variación del flujo magnético a través de la espira, ya que la espira no está conectada a fuente o dispositivo real alguno.



Obsérvese que si entre los extremos A y B de la espira se colocase un medio óhmico que permitiese el paso de corriente eléctrica, el sentido de ésta sería del extremo A hacia el B . En consecuencia, el circuito debe construirse de manera que los polos P y N del dispositivo que modela a la fuerza electromotriz estén conectados, respectivamente, a los extremos A y B de la espira. Como en la resistencia no se produce caída de tensión alguna, ya que la intensidad de corriente es nula, se tendrá que la señal de tensión entre los extremos de la espira coincide con la fuerza electromotriz inducida por la variación del flujo magnético a través de aquélla. Por tanto, la señal de tensión V medida por el voltímetro conectado entre dichos extremos, es una diferencia de potencial (constante en el tiempo) positiva de valor \mathcal{E}_0 :

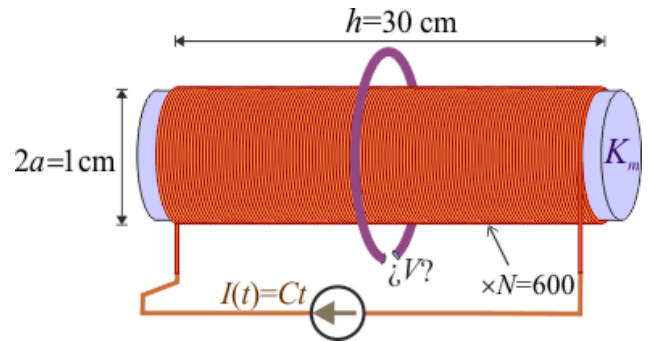
$$V_A - V_B = V_P - V_N = \mathcal{E}_{\text{ind}} \quad \Rightarrow \quad V = V_A - V_B = \mathcal{E}_0 = \mu_0 \frac{N}{l} \pi a^2 C$$

Voltaje inducido en espira alrededor de un solenoide (F2GIA)

De Laplace

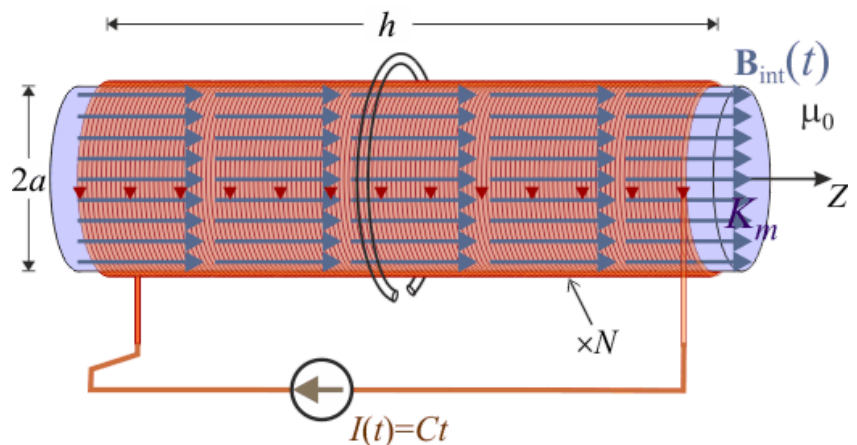
1 Enunciado

Un solenoide de longitud $h = 30 \text{ cm}$ y diámetro $2a = 1 \text{ cm}$, está formado por $N = 600$ espiras paralelas, que se enrollan de manera compacta sobre la superficie de un cilindro de hierro cuya permeabilidad relativa es $K_m \approx 5000$. Una anilla conductora filiforme rodea al solenoide, estando contenida en un plano perpendicular al eje del mismo y lejos de sus extremos. A la anilla le falta un pequeño trozo, de manera que constituye un circuito abierto. Si por el conductor del solenoide se hace pasar una corriente cuya intensidad crece linealmente según la ley $I(t) = Ct$, con $C = 10 \text{ mA/s}$. ¿Qué tensión se medirá entre los extremos abiertos de la anilla?



2 Solución

Una corriente eléctrica de intensidad I que recorre una [bobina rellena de un material ferromagnético](#), formada por N espiras perpendiculares a su eje longitudinal y en la que es posible aplicar la aproximación de bobina larga ($h \gg 2a$), crea un campo magnético cuya expresión en todo el espacio es:



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \simeq \begin{cases} K_m \frac{\mu_0 N}{h} I \mathbf{k} = \mathbf{B}_{\text{int}}(t); & \text{en el interior de la bobina} \\ \mathbf{0}; & \text{en el exterior de la bobina} \end{cases}$$

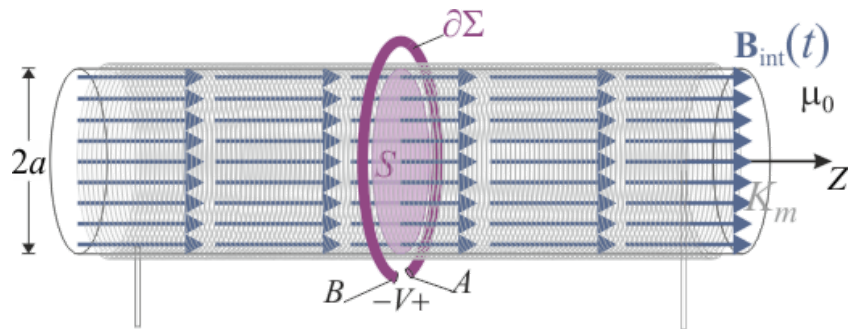
donde $K_m = 1 + \chi_m$ es la permeabilidad magnética relativa del material ferromagnético cuando éste presenta un comportamiento lineal; como se recordará, esto ocurre si el campo magnetizante no es lo suficientemente intenso como para que el material alcance la imanación de saturación, de manera que el ferromagnético se comporta como un paramagnético de alta permeabilidad.

La anterior expresión es cierta tanto para corrientes estacionarias como variables, siempre que éstas no cambien muy rápidamente. Y suponiendo que esta condición se verifica en el sistema

analizado, se tendrá que en el interior del solenoide existirá un campo magnético prácticamente uniforme y variable en el tiempo, según la ley:

$$\mathbf{B}_{\text{int}}(t) = \frac{K_m \mu_0 N}{h} I(t) \mathbf{k} = \frac{K_m \mu_0 N C}{h} t \mathbf{k}$$

Este campo fluye a través de toda superficie abierta Σ , cuyo contorno coincida con la espira filiforme $\partial\Sigma$ que rodea al solenoide. Para calcular el valor de dicho flujo tomaremos la superficie delimitada por la espira y que está contenida en su mismo plano, de manera que la dirección del campo es perpendicular a dicha superficie en todos sus puntos ($d\mathbf{S} = dS \mathbf{k}$). Por otra parte, el campo magnético sólo va a ser no nulo en el interior del solenoide, por lo que sólo habrá contribuciones al flujo magnético en la sección circular S de la bobina con ferromagnético. Y como el campo magnético en el interior es uniforme y la sección S es un círculo de radio a , se tendrá...



$$\Phi_m(t)]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}; t) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B}_{\text{int}}(t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{K_m \mu_0 N C \pi a^2}{h} t$$

En virtud de la ley de inducción electromagnética, en la espira conductora $\partial\Sigma$ se inducirá una fuerza electromotriz, la cuál tendrá un valor constante mientras en el solenoide exista la corriente $I(t)$ que genera el campo magnético de variación lineal en el tiempo.

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}]_{\partial\Sigma} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right]_{\Sigma} = - \frac{K_m \mu_0 N C \pi a^2}{h}$$

Como no hay generadores conectados $\partial\Sigma$, ésta es la única f.e.m. que podría producir el movimiento de cargas eléctricas. Sin embargo, como le falta un trozo y constituye un circuito abierto, dicha fuerza electromotriz coincide con el voltaje o tensión que se puede medir entre los extremos A y B . Sustituyendo los valores de los parámetros geométricos y eléctricos que se proporcionan en el enunciado, y teniendo en cuenta que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, se obtiene:

$$V = V_A - V_B = -\mathcal{E}_{\text{ind}}]_{\partial\Sigma} = \frac{K_m \mu_0 N C \pi a^2}{h} = \pi^2 \times 10^{-6} \text{ V} \approx 10 \mu\text{V}$$

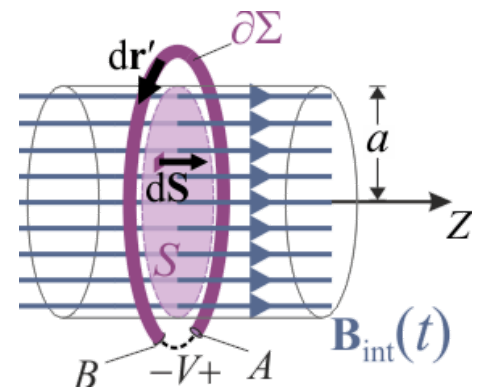
2.1 Anexo: f.e.m. inducida y tensión en los extremos de la espira

Recordemos cómo se obtenía la relación entre la fuerza electromotriz inducida en la espira abierta y la señal de tensión que se puede medir entre sus extremos. En cada punto P' del circuito $\partial\Sigma$ podemos definir una fuerza general que actúa sobre cada carga eléctrica puntual. Ésta será igual a la fuerza de Lorentz más una posible fuerza no eléctrica definida sólo en el interior de los generadores y que es responsable del movimiento de las cargas en sentido contrario al campo eléctrico. El trabajo que por unidad de carga habría de realizar esta fuerza para que las cargas puntuales completasen un circuito es, por definición, la fuerza electromotriz total en el circuito, y que será igual a la suma de la inducida más la del (los) posible(s) generadore(s) conectados:

$$\mathbf{F}|_{P' \in \partial \Sigma} = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] + q \mathbf{E}'(\mathbf{r}') \implies \mathcal{E}_{\text{total}}|_{\partial \Sigma} = \oint_{\partial \Sigma} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}'] \cdot d\mathbf{r}' = [\mathcal{E}_{\text{ind}} + \mathcal{E}_{\text{gen}}]_{\partial \Sigma}$$

La espira del sistema bajo estudio permanece en reposo; es decir, su velocidad es nula en todo instante por lo que sólo la variación del campo magnético contribuirá a la fuerza electromotriz inducida. Además, no hay generadores conectados a la espira por lo que, tanto \mathbf{E}' como \mathcal{E}_{gen} son nulos también. En consecuencia, la f.e.m. inducida por la variación del flujo magnético a través de la superficie delimitada por la espira, va a ser igual a la circulación del campo eléctrico a lo largo de dicho circuito:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial \Sigma} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\Sigma} = \oint_{\partial \Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'$$



Hay que señalar que el sentido adoptado para medir o calcular la circulación del campo eléctrico en el circuito $\partial \Sigma$ está vinculado al sentido en que se calcula o mide el flujo magnético a través de la superficie Σ , según el criterio del triedro directo. Dicha circulación podemos descomponerla en dos términos: uno desde el extremo A hasta el B, a lo largo del conductor filiforme que constituye la espira abierta, y otro desde B hasta A, a través del *gap* o trozo de circuito sin conductor. Obsérvese que, según la ley de Ohm, el campo eléctrico en el conductor filiforme debe ser proporcional al vector densidad volumétrica de corriente. Pero si la espira está abierta, no puede haber corrientes circulando por ella y, por tanto, dicho vector debe ser nulo en todos los puntos. Por otra parte, la circulación del campo eléctrico desde el extremo A hasta el B por el exterior de la espira es precisamente la medida que efectuaría un voltímetro conectado entre dichos extremos: es decir,

$$\oint_{\partial \Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = \int_{A(\text{esp})}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' + \int_{B(\text{ext})}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = \int_A^B \overbrace{(\mathbf{J}/\sigma)}^{=0} \cdot d\mathbf{r}' + V_B - V_A \implies V = V_A - V_B = -\mathcal{E}_{\text{ind}} = \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\Sigma}$$